

# CIENCIA DESARROLLO

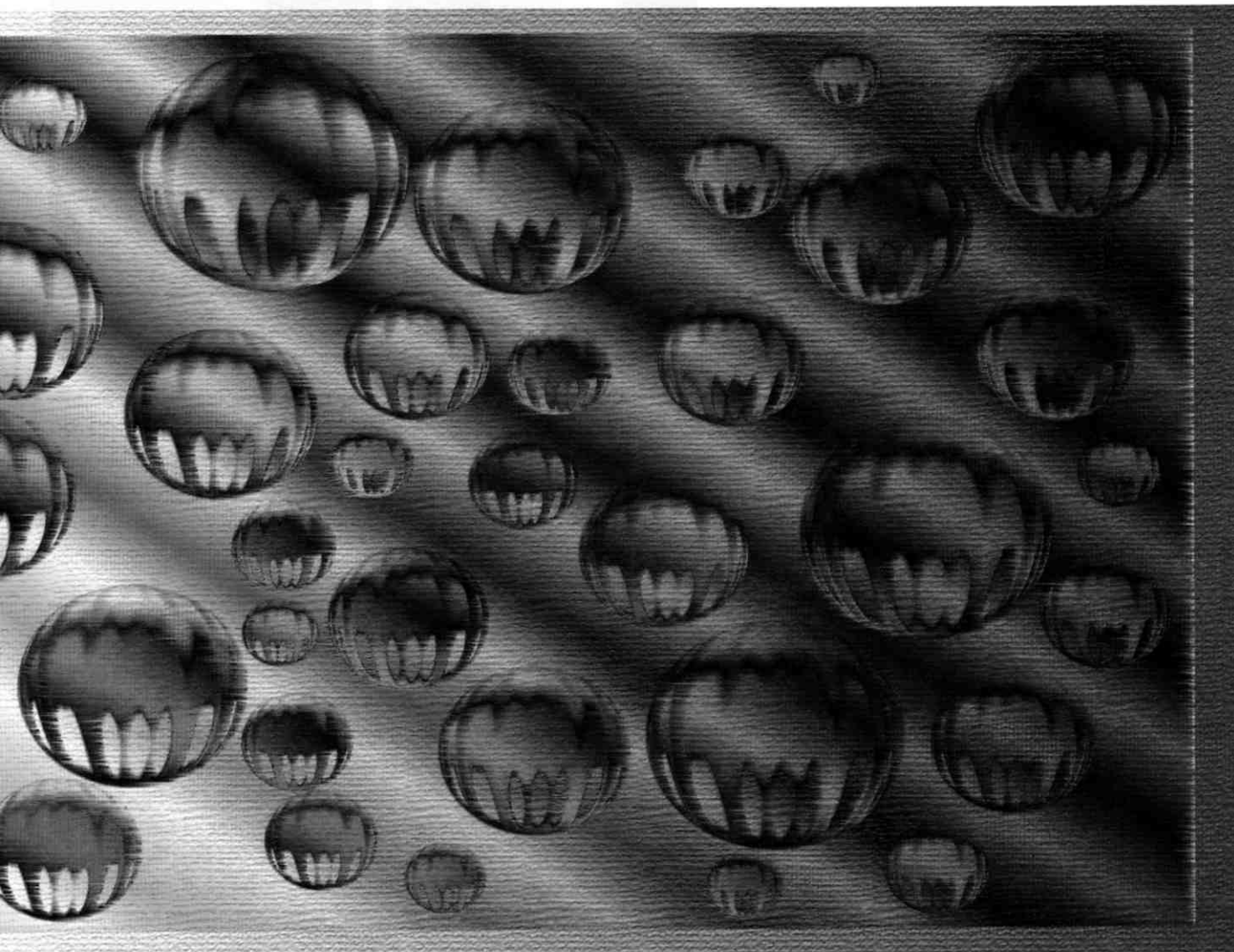
## EL ALGORITMO DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER Y SU CONTROVERTIDO ORIGEN



JUAN MANUEL RAMIREZ CORTES, MA. DEL PILAR GOMEZ GIL, DAVID BAEZ LOPEZ



**L**a historia de la ciencia y la tecnología nos habla de muchos casos en los cuales la autoría de determinado trabajo resulta incierta; bien, debido a que dos o más investigadores, trabajando en un mismo problema, obtienen resultados similares de manera casi simultánea, o bien, a que la comunicación de resultados, si es que existía, no resultó oportuna en el medio y los momentos utilizados. El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) es uno de estos casos. Su gran utilidad, así como la interesante historia de su aparición, hacen de la FFT un apasionante tema de estudio y reflexión.



## Introducción

En abril de 1965, la revista *Mathematics of Computation* publicaba un artículo de cinco páginas, más bien modesto y sin excesivas pretensiones, escrito en una sola sección sin conclusiones ni resumen, bajo el título "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series".<sup>1</sup> A los pocos días, la atención de la comunidad científica involucrada en el área de Procesamiento Digital de Señales se había volcado sobre el algoritmo descrito, que abría las puertas a un terreno lleno de posibilidades de aplicación, señalándolo como parteaguas en las técnicas de procesado conocidas hasta ese momento. En palabras del doctor Bruce P. Bogert, editorialista del primer número del *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, dedicado íntegramen-

te a la FFT: "Las aplicaciones de las computadoras digitales al procesamiento de señales de audio, en particular de voz, han seguido un crecimiento explosivo. Sin embargo, el completo aprovechamiento de la tecnología digital ha sido restringido por la complejidad asociada con la transformación entre tiempo y frecuencia. Con el advenimiento de la FFT, la gran barrera entre los dominios de tiempo y frecuencia se ha reducido de manera significativa, con ahorros en el esfuerzo computacional requerido por un factor hasta de varios cientos en el caso de cadenas suficientemente largas. Aquellos procedimientos que proporcionan reducción en complejidad de tal magnitud pueden ser llamados con toda propiedad parteaguas (*a breakthrough*) en la tecnología." Todo esto había sucedido ante los ojos de los grandes investigadores del procesamiento digital de señales de la época, quienes se pre-

Figura 1. Doctores James W. Cooley del Centro de Investigación Watson de la IBM y John Tukey de la Universidad de Princeton. Se les reconoce como autores del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier.



guntaban de dónde había surgido esta sensacional idea plasmada en un pequeño artículo que hacía referencia, nada directa sólo a dos trabajos previos. ¿Los autores?, un investigador de IBM, especialista en computación y análisis numérico, y un profesor de estadística de la Universidad de Princeton, James W. Cooley y John W. Tukey, respectivamente.

### Sólo un programa más

Doce años atrás, Richard L. Garwin, investigador del Centro de Investigación Watson de la IBM y compañero de J. W. Cooley, requería como parte de uno de sus proyectos un programa que realizara el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier en tres dimensiones. Sabiendo de la capacidad de Cooley, decidió invitarlo a participar en el desarrollo, comentándole de recientes ideas presentadas por el profesor Tukey de la Universidad de Princeton en sus clases de estadística, que podrían ser utilizadas para optimizar la eficiencia del algoritmo. Después de algunos meses, y otras tantas llamadas telefónicas por parte de Garwin, unas a Cooley y otras estratégicas al jefe de éste, quedó lista una primera versión del programa. El doctor Cooley sabía de antemano que, dadas las dimensiones de los datos, una buena parte del problema requería del manejo eficiente de la memoria disponible, por lo cual había puesto especial dedicación en el direccionamiento de los datos, generando un esquema de indexado tridimensional, compatible con las variables del programa y suficientemente eficiente a su juicio. Los resultados eran buenos, por lo que a sugerencia del grupo de computación de la IBM el algoritmo sería puesto a disposición del dominio público, y para ello resultaba prudente documentarlo en un artículo. Cooley, en un acto de sinceridad académica, consideró correcto invitar como coautor al doctor Tukey de la Universidad de Princeton, para lo cual le hizo llegar un borrador con la descripción del algoritmo. El borrador no contenía referencia alguna a trabajos previos, pues el programa había sido desarrollado, tomando como base únicamente las ideas generales de Tukey. Después de leves modificaciones por parte de éste, incluyendo una breve introducción que hacía referencia a un par de estudios previos, el artículo fue man-

dato al consejo editorial de *Mathematics of Computation*. Es muy probable que aun en esos momentos los autores no hubieran tenido clara idea acerca de la relevancia del trabajo que estaban presentando y el efecto que éste tendría. De cualquier manera, el artículo fue publicado en el volumen 19, núm. 90, del mes de abril del año de 1965.

### ¡Yo lo ví antes!

Unos meses después de la publicación de aquel artículo, Philip Rudnick, investigador del Instituto Scripps de Oceanografía de la Universidad de California en San Diego, sometía un breve comunicado de dos páginas<sup>2</sup> para su publicación en la revista *Mathematics of Computation*. Rudnick decía que el algoritmo presentado por Cooley y Tukey era similar al método descrito por Danielson y Lanczos en un artículo publicado 23 años antes, es decir, en 1942. Basado en ese artículo y con algunas mejoras leves, Rudnick había descrito un programa que venía utilizando desde hacía algún tiempo. Efectivamente, el artículo de Danielson y Lanczos<sup>3</sup> describía en esencia el algoritmo de desdoblamiento básico de la FFT. Es interesante el hecho de que el algoritmo se presentaba en referencia al tratamiento de problemas en imágenes de rayos X, un área en la que, muchos años después de 1942, el cálculo de la Transformada de Fourier había sido un cuello de botella, por lo que debería haber resultado atractivo para muchos investigadores quienes, desafortunadamente, no notaron su presencia. La revista escogida por Danielson y Lanczos para la publicación de su informe técnico fue de baja circulación y orientación local. Cualesquiera que hayan sido las razones, el hecho es que dicho artículo pasó inadvertido hasta que Rudnick lo desempolvó para utilizarlo en su propio trabajo. Cuando Cooley le preguntó a aquél por qué no había publicado su trabajo con anterioridad, Rudnick respondió que su campo no era el análisis numérico, y que su único interés había sido tener a su disposición un programa que le ayudara en el análisis de sus datos. Aun cuando Cooley le dio

# Mathematics of Computation

A journal devoted to advances in numerical analysis, the application of computational methods, mathematical tables, high-speed calculators and other aids to computation



Figura 2. Portada del volumen 19, núm. 90 de la revista Mathematics of Computation. La publicación del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier traería como consecuencia relevantes cambios en las técnicas del procesamiento digital de señales.

Mathematics of Computation TABLE OF CONTENTS APRIL 1965

Orthogonal Polynomials with Applications to the Legendre Chebyshev	J. F. Tolson	191
Random Numbers Generated by Linear Recursion	Michael J. Z. 7	199
Some Conclusions about Cyclic Codes	Richard C. Green	201
Methods for Approximation of Bessel Differential Equations	Richard M. Branson	210
Approximation of a Class of Wave Integrals	Richard M. Branson	218
Practical Errors in Two-Dimensional Signal Approximation	Leon D. Francis	225
Chebyshev Polynomials: Properties of Complex Eigenvalues	Leon D. Francis	232
Approximate Solution of the Eigenvalue Problem	Leon D. Francis	238
Estimates of Matrix Elements for Hyperbolic I. Error Estimates	G. J. Gray	249
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	256
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	263
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	270
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	277
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	284
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	291
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	298
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	305
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	312
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	319
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	326
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	333
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	340
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	347
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	354
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	361
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	368
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	375
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	382
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	389
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	396
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	403
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	410
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	417
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	424
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	431
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	438
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	445
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	452
Algorithms for the Solution of the Eigenvalue Problem	G. J. Gray	459

posteriormente a Rudnick el crédito por lo que consideró el primer programa de cómputo realizado mediante un proceso iterativo, el algoritmo rápido de la Transformada de Fourier, Rudnick se perdió de ver su trabajo referenciado en miles de artículos publicados por colegas en todo el mundo, y de ver su nombre asociado al algoritmo que obligadamente aparece en los textos de procesamiento digital de señales. No corrió con mejor suerte Gordon Sande, un brillante estudiante de doctorado, discípulo del doctor Tukey en la Universidad de Princeton, quien había sido expuesto a las ideas de Tukey sobre el desdoblamiento en el cálculo de la Transformada en uno de sus cursos, y se encontraba trabajando en el tema al tiempo en que el artículo de Tukey estaba por salir. Sus artículos posteriores sobre el tema, si bien de calidad, no tuvieron mayor repercusión.

### Los congresos de Arden House

Los resultados obtenidos con el nuevo algoritmo llenaron de entusiasmo a Richard Garwin, quien desde un principio se había mostrado ansioso por darlos a conocer a la comunidad científica, y sin cuya insistencia, probablemente el trabajo jamás habría sido publicado; en contraste, el tremendo potencial del trabajo desarrollado pasaba inadvertido para el propio autor. Cooley lo narra de la siguiente forma:<sup>4,5</sup> "Como parte de sus investigaciones, Garwin había solicitado que alguien escribiera para él un programa, por lo cual el problema recayó en mis manos. Realizado el producto y publicado el trabajo yo sentía que mi participación había terminado. Finalmente era su proyecto, así que pensé que no

volvería a saber del caso y continué con mis propios trabajos de investigación. El significado del factor de eficiencia computacional  $N \log N$  vs.  $N^2$  pasó inadvertido para mí, dado que nunca había requerido del análisis de Fourier, y no tenía conciencia del número de aplicaciones de computadora que se venían llevando a cabo ni de la dimensión de los datos que se manejaban. Cuando el artículo fue aceptado por la revista, ni siquiera pasó por mi mente ordenar reimpresiones, dado que no quería repetir experiencias anteriores que mantenían mi archivero lleno de artículos que a nadie interesaban." En esta ocasión, sin embargo, el interés estaba creciendo. Garwin proponía organizar algunas sesiones dedicadas íntegramente a la FFT. A Cooley, por el contrario, le parecía extraño que un pequeño y simple algoritmo asumiera tal relevancia, y que en caso de tenerla, no hubiera sido concebido con anterioridad por alguien más. Por ello, su sorpresa fue grande al recibir la invitación por parte del Comité de Procesamiento Digital de Señales de la IEEE Acoustics Speech and Signal Processing Society para incorporarse a sus actividades como miembro honorario del Group on Audio and Electroacoustics. Esta fue la primera evidencia real para Cooley de la relevancia de la FFT. Para beneplácito de Garwin, en 1968 y 1970 se realizaron dos congresos en Arden House, Harriman, Nueva York, dedicados del todo a la Transformada Rápida de Fourier y sus aplicaciones.<sup>6,7</sup> Investigadores de muy diversas disciplinas se dieron cita en la reunión, para presentar una variedad de trabajos que indudablemente apoyaban su factibilidad en la eficiencia de la FFT, y los más importantes de estas sesiones fueron recopilados en dos ediciones especiales de la revista de la misma Sociedad. Las técnicas de procesado digital de señales basadas en análisis espectral habían entrado a una nueva época.

### El algoritmo

El tratamiento de señales de tiempo discreto y su análisis espectral son temas fundamentales del procesamiento digital de señales, ampliamente tratados con toda formalidad en la literatura existente al respecto. Los detalles del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier en

