

CIENCIA DESARROLLO

EL ALGORITMO DE LA TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER Y SU CONTROVERTIDO ORIGEN



JUAN MANUEL RAMIREZ CORTES, MA. DEL PILAR GOMEZ GIL, DAVID BAEZ LOPEZ



La historia de la ciencia y la tecnología nos habla de muchos casos en los cuales la autoría de determinado trabajo resulta incierta; bien, debido a que dos o más investigadores, trabajando en un mismo problema, obtienen resultados similares de manera casi simultánea, o bien, a que la comunicación de resultados, si es que existía, no resultó oportuna en el medio y los momentos utilizados. El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés) es uno de estos casos. Su gran utilidad, así como la interesante historia de su aparición, hacen de la FFT un apasionante tema de estudio y reflexión.



Introducción

En abril de 1965, la revista *Mathematics of Computation* publicaba un artículo de cinco páginas, más bien modesto y sin excesivas pretensiones, escrito en una sola sección sin conclusiones ni resumen, bajo el título "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series".¹ A los pocos días, la atención de la comunidad científica involucrada en el área de Procesamiento Digital de Señales se había volcado sobre el algoritmo descrito, que abría las puertas a un terreno lleno de posibilidades de aplicación, señalándolo como parteaguas en las técnicas de procesado conocidas hasta ese momento. En palabras del doctor Bruce P. Bogert, editorialista del primer número del *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, dedicado íntegramen-

te a la FFT: "Las aplicaciones de las computadoras digitales al procesamiento de señales de audio, en particular de voz, han seguido un crecimiento explosivo. Sin embargo, el completo aprovechamiento de la tecnología digital ha sido restringido por la complejidad asociada con la transformación entre tiempo y frecuencia. Con el advenimiento de la FFT, la gran barrera entre los dominios de tiempo y frecuencia se ha reducido de manera significativa, con ahorros en el esfuerzo computacional requerido por un factor hasta de varios cientos en el caso de cadenas suficientemente largas. Aquellos procedimientos que proporcionan reducción en complejidad de tal magnitud pueden ser llamados con toda propiedad parteaguas (*a breakthrough*) en la tecnología." Todo esto había sucedido ante los ojos de los grandes investigadores del procesamiento digital de señales de la época, quienes se pre-

Figura 1. Doctores James W. Cooley del Centro de Investigación Watson de la IBM y John Tukey de la Universidad de Princeton. Se les reconoce como autores del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier.



guntaban de dónde había surgido esta sensacional idea plasmada en un pequeño artículo que hacía referencia, nada directa sólo a dos trabajos previos. ¿Los autores?, un investigador de IBM, especialista en computación y análisis numérico, y un profesor de estadística de la Universidad de Princeton, James W. Cooley y John W. Tukey, respectivamente.

Sólo un programa más

Doce años atrás, Richard L. Garwin, investigador del Centro de Investigación Watson de la IBM y compañero de J. W. Cooley, requería como parte de uno de sus proyectos un programa que realizara el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier en tres dimensiones. Sabiendo de la capacidad de Cooley, decidió invitarlo a participar en el desarrollo, comentándole de recientes ideas presentadas por el profesor Tukey de la Universidad de Princeton en sus clases de estadística, que podrían ser utilizadas para optimizar la eficiencia del algoritmo. Después de algunos meses, y otras tantas llamadas telefónicas por parte de Garwin, unas a Cooley y otras estratégicas al jefe de éste, quedó lista una primera versión del programa. El doctor Cooley sabía de antemano que, dadas las dimensiones de los datos, una buena parte del problema requería del manejo eficiente de la memoria disponible, por lo cual había puesto especial dedicación en el direccionamiento de los datos, generando un esquema de indexado tridimensional, compatible con las variables del programa y suficientemente eficiente a su juicio. Los resultados eran buenos, por lo que a sugerencia del grupo de computación de la IBM el algoritmo sería puesto a disposición del dominio público, y para ello resultaba prudente documentarlo en un artículo. Cooley, en un acto de sinceridad académica, consideró correcto invitar como coautor al doctor Tukey de la Universidad de Princeton, para lo cual le hizo llegar un borrador con la descripción del algoritmo. El borrador no contenía referencia alguna a trabajos previos, pues el programa había sido desarrollado, tomando como base únicamente las ideas generales de Tukey. Después de leves modificaciones por parte de éste, incluyendo una breve introducción que hacía referencia a un par de estudios previos, el artículo fue man-

dato al consejo editorial de *Mathematics of Computation*. Es muy probable que aun en esos momentos los autores no hubieran tenido clara idea acerca de la relevancia del trabajo que estaban presentando y el efecto que éste tendría. De cualquier manera, el artículo fue publicado en el volumen 19, núm. 90, del mes de abril del año de 1965.

¡Yo lo ví antes!

Unos meses después de la publicación de aquel artículo, Philip Rudnick, investigador del Instituto Scripps de Oceanografía de la Universidad de California en San Diego, sometía un breve comunicado de dos páginas² para su publicación en la revista *Mathematics of Computation*. Rudnick decía que el algoritmo presentado por Cooley y Tukey era similar al método descrito por Danielson y Lanczos en un artículo publicado 23 años antes, es decir, en 1942. Basado en ese artículo y con algunas mejoras leves, Rudnick había descrito un programa que venía utilizando desde hacía algún tiempo. Efectivamente, el artículo de Danielson y Lanczos³ describía en esencia el algoritmo de desdoblamiento básico de la FFT. Es interesante el hecho de que el algoritmo se presentaba en referencia al tratamiento de problemas en imágenes de rayos X, un área en la que, muchos años después de 1942, el cálculo de la Transformada de Fourier había sido un cuello de botella, por lo que debería haber resultado atractivo para muchos investigadores quienes, desafortunadamente, no notaron su presencia. La revista escogida por Danielson y Lanczos para la publicación de su informe técnico fue de baja circulación y orientación local. Cualesquiera que hayan sido las razones, el hecho es que dicho artículo pasó inadvertido hasta que Rudnick lo desempolvó para utilizarlo en su propio trabajo. Cuando Cooley le preguntó a aquél por qué no había publicado su trabajo con anterioridad, Rudnick respondió que su campo no era el análisis numérico, y que su único interés había sido tener a su disposición un programa que le ayudara en el análisis de sus datos. Aun cuando Cooley le dio

Mathematics of Computation

A journal devoted to advances in numerical analysis, the application of computational methods, mathematical tables, high-speed calculators and other aids to computation



Mathematics of Computation
TABLE OF CONTENTS
April 1965

Orthogonal Polynomials with Applications to the Legendre Chebyshev	J. F. Tolson	191
Random Numbers Generated by Linear Recursion	Michael J. Z. 7	199
Some Conclusions about Cyclic Codes	Richard C. Ashpazz	201
Methods for Approximation of Bessel Differential Equations	Norman M. Branson	210
Approximation of a Class of Wave Integrals	Richard W. Vainikko	218
Practical Errors in Two Chebyshev Series Approximations	Leon B. Frenkel	225
Chebyshev Polynomials: Representations of Complex Eigenvalues	Leon B. Frenkel	232
Approximate Inequality Relations for Hyperbolic T-Error Functions	E. J. Gray	239
Algorithms for the Solution of the Generalized Hypergeometric Functions	W. S. Leitch	246
An Algorithm for the Matrix Calculation of Chebyshev Polynomials	C. R. Gentry	257
Some Notes on Linear Recursion	James W. Cooley & James W. Tukey	269
A Practical Algorithm for the Calculation of the Legendre Polynomials	A. H. Titus	276
Myriad's Method Applied to the General Eigenvalue Problem	W. S. Leitch	287
A Search for Improved Places of a Special Type with Certain Digital Computers	W. S. Leitch	294
Approximate Trigonometric Functions for Digital Computers	A. D. Stepanov	301
Improved Approximate Expansion for the Error Function	James L. A. A. H. Brown	308
Trigonometric Approximation for the Error Function	James L. A. A. H. Brown	315
Algorithms of Computation in the Field of Real Numbers	James W. Cooley	327
Algorithms of Computation in the Field of Real Numbers	James W. Cooley	339

Figura 2. Portada del volumen 19, núm. 90 de la revista Mathematics of Computation. La publicación del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier traería como consecuencia relevantes cambios en las técnicas del procesamiento digital de señales.

posteriormente a Rudnick el crédito por lo que consideró el primer programa de cómputo realizado mediante un proceso iterativo, el algoritmo rápido de la Transformada de Fourier, Rudnick se perdió de ver su trabajo referenciado en miles de artículos publicados por colegas en todo el mundo, y de ver su nombre asociado al algoritmo que obligadamente aparece en los textos de procesamiento digital de señales. No corrió con mejor suerte Gordon Sande, un brillante estudiante de doctorado, discípulo del doctor Tukey en la Universidad de Princeton, quien había sido expuesto a las ideas de Tukey sobre el desdoblamiento en el cálculo de la Transformada en uno de sus cursos, y se encontraba trabajando en el tema al tiempo en que el artículo de Tukey estaba por salir. Sus artículos posteriores sobre el tema, si bien de calidad, no tuvieron mayor repercusión.

Los congresos de Arden House

Los resultados obtenidos con el nuevo algoritmo llenaron de entusiasmo a Richard Garwin, quien desde un principio se había mostrado ansioso por darlos a conocer a la comunidad científica, y sin cuya insistencia, probablemente el trabajo jamás habría sido publicado; en contraste, el tremendo potencial del trabajo desarrollado pasaba inadvertido para el propio autor. Cooley lo narra de la siguiente forma:^{4,5} "Como parte de sus investigaciones, Garwin había solicitado que alguien escribiera para él un programa, por lo cual el problema recayó en mis manos. Realizado el producto y publicado el trabajo yo sentía que mi participación había terminado. Finalmente era su proyecto, así que pensé que no

volvería a saber del caso y continué con mis propios trabajos de investigación. El significado del factor de eficiencia computacional $N \log N$ vs. N^2 pasó inadvertido para mí, dado que nunca había requerido del análisis de Fourier, y no tenía conciencia del número de aplicaciones de computadora que se venían llevando a cabo ni de la dimensión de los datos que se manejaban. Cuando el artículo fue aceptado por la revista, ni siquiera pasó por mi mente ordenar reimpresiones, dado que no quería repetir experiencias anteriores que mantenían mi archivero lleno de artículos que a nadie interesaban." En esta ocasión, sin embargo, el interés estaba creciendo. Garwin proponía organizar algunas sesiones dedicadas íntegramente a la FFT. A Cooley, por el contrario, le parecía extraño que un pequeño y simple algoritmo asumiera tal relevancia, y que en caso de tenerla, no hubiera sido concebido con anterioridad por alguien más. Por ello, su sorpresa fue grande al recibir la invitación por parte del Comité de Procesamiento Digital de Señales de la IEEE Acoustics Speech and Signal Processing Society para incorporarse a sus actividades como miembro honorario del Group on Audio and Electroacoustics. Esta fue la primera evidencia real para Cooley de la relevancia de la FFT. Para beneplácito de Garwin, en 1968 y 1970 se realizaron dos congresos en Arden House, Harriman, Nueva York, dedicados del todo a la Transformada Rápida de Fourier y sus aplicaciones.^{6,7} Investigadores de muy diversas disciplinas se dieron cita en la reunión, para presentar una variedad de trabajos que indudablemente apoyaban su factibilidad en la eficiencia de la FFT, y los más importantes de estas sesiones fueron recopilados en dos ediciones especiales de la revista de la misma Sociedad. Las técnicas de procesado digital de señales basadas en análisis espectral habían entrado a una nueva época.

El algoritmo

El tratamiento de señales de tiempo discreto y su análisis espectral son temas fundamentales del procesamiento digital de señales, ampliamente tratados con toda formalidad en la literatura existente al respecto. Los detalles del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier en

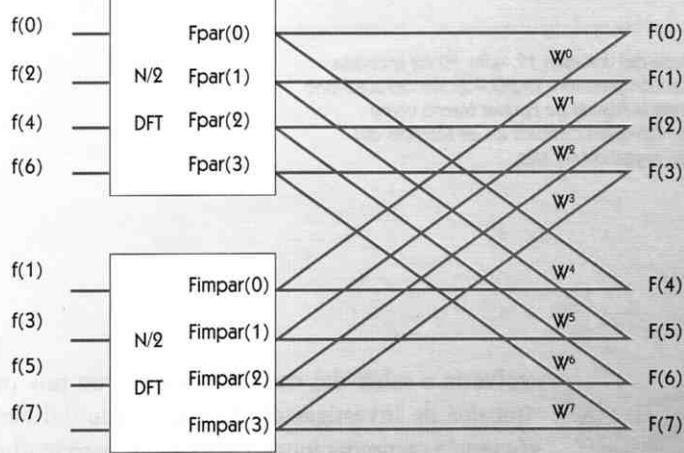


Figura 3. La Transformada Discreta de Fourier (DFT, por sus siglas en inglés) de una secuencia de N muestras se obtiene a partir del cálculo de dos DFT de $N/2$ muestras.

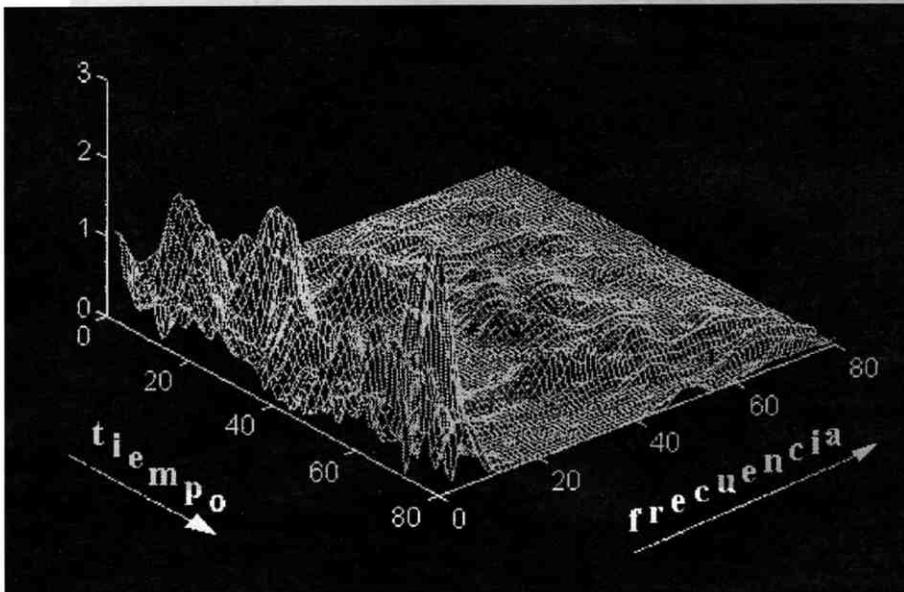


Figura 4. El espectrograma de una señal es obtenido a través de la Transformada de Fourier en diferentes ranuras de tiempo. Este tipo de gráficas permite analizar el contenido espectral de la señal en tiempo y frecuencia. En esta figura se muestra el espectrograma de un segmento de voz previamente digitalizado.

sus diversas modalidades pueden encontrarse en distintos libros, y la referencia 8 es un texto clásico. Conceptualmente, se puede resumir la idea fundamental del algoritmo en la partición en dos grupos del número total de puntos por analizar. La figura 3 muestra esquemáticamente el cálculo de la Transformada de una secuencia discreta de ocho puntos, mediante el cálculo de dos Transformadas de cuatro puntos cada una. Esta figura en particular corresponde al caso denominado “decimación en tiempo”.

El proceso puede repetirse para el cálculo de cada una de las dos Transformadas de cuatro puntos, y así sucesivamente hasta llegar al nivel en el que sólo se requiere del cálculo de la Transformada de dos muestras, denominado “la mariposa básica”. En general, el número de niveles para un conjunto de N muestras es $\log_2 N$, y se puede observar que en cada nivel

se requieren N multiplicaciones por los términos W , definidos por el núcleo de la transformación, con lo cual, el número total de multiplicaciones involucradas en el cálculo de la DFT de N muestras es $N \log_2 N$. Si el mismo cálculo fuese realizado mediante la definición original, el número de multiplicaciones sería N^2 , lo cual, para un caso hipotético de 16 384 muestras, marcaría la diferencia entre esperar frente al monitor de alguna computadora durante media hora o únicamente tres segundos. En el caso de procesamiento de imágenes en las que el número requerido de puntos de procesamiento es considerablemente más elevado que en señales unidimensionales, la diferencia en tiempo de cómputo es aún más dramática. La mejora sustancial en tiempo y exactitud, características del algoritmo, hacen de la FFT una eficiente herramienta incorporada actualmente en todos los sistemas

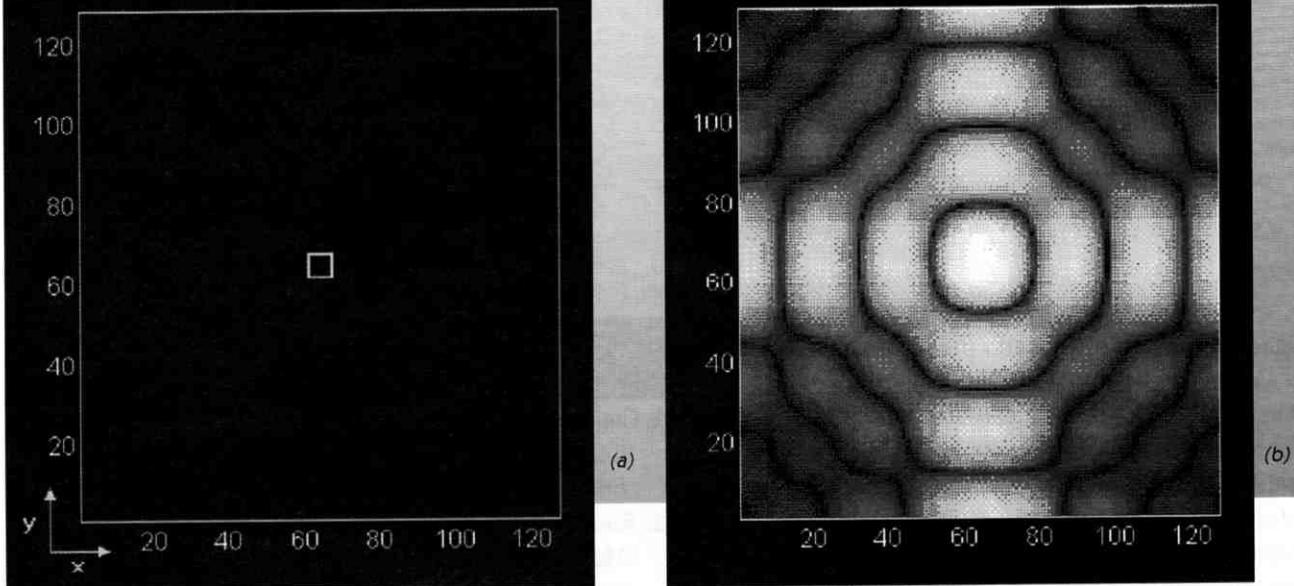


Figura 5. El espectro de Fourier de una imagen proporciona información acerca del contenido armónico sinusoidal de ésta en el dominio de la frecuencia espacial. a) Imagen de entrada, b) Magnitud de su Transformada de Fourier enseudocolor. (Las gráficas que se presentan en este artículo fueron realizadas en MATLAB, TM, MathSoft, Inc.).

de análisis y tratamiento de señales. En la figura 4 se puede ver el espectrograma de una señal de voz. La figura 5 muestra la Transformada de Fourier de una imagen de 128x128 pixels. El análisis espectral es fundamental en aplicaciones como filtrado, restauración, o compresión de imágenes, por mencionar algunas. Estas gráficas permiten analizar la distribución espectral de energía para los diferentes tiempos de ocurrencia de una determinada señal, y su realización requiere del cálculo consecutivo de Transformadas de Fourier en ventanas o tramos de la señal de entrada.

La genialidad de Gauss de manifiesto una vez más

En 1977 Herman H. Goldstine publicó un libro titulado *A History of Numerical Analysis from the 16th Through the 19th Century*,⁹ en el que describía la existencia de un artículo en el tercer volumen de las obras recolectadas en 1866, *postmortem*, del genial matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). El artículo de Gauss en cuestión estaba relacionado con algoritmos de interpolación trigonométrica, extendidos a funciones periódicas, para lo cual recurría a la expansión en series de Fourier en su forma trigonométrica, y de acuerdo con Goldstine, las simplificaciones matemáticas del trabajo contenían las ideas básicas del algoritmo de la FFT. En 1984, Michael T. Heideman, estudiante de la Rice University, decidió realizar, como parte de su investigación doctoral relacionada con algoritmos rápidos para el procesamiento de señales, una recopilación bibliográfica exhaustiva acerca de la Transformada de Fourier.¹⁰ Las investigaciones de Heideman lo llevaron inequívocamente a

las obras póstumas de Gauss, publicadas originalmente en neolatín. En los artículos 25 y 28 del texto original,¹¹ Heideman encontró que efectivamente las expresiones obtenidas por Gauss en el desarrollo de ese trabajo correspondían de manera perfecta con la factorización característica del algoritmo de Cooley y Tukey; sin embargo, la notación y especialmente la forma trigonométrica usada por Gauss hacía que la equivalencia con la forma clásica en que se presenta la FFT, basada en términos exponenciales complejos, no fuese obvia. Al parecer Gauss no consideró este trabajo de especial relevancia dentro del mar de geniales desarrollos matemáticos que de él se conocen en la actualidad; el caso es que, aun cuando se especula que este algoritmo formó parte de su trabajo correspondiente al primer decenio del siglo pasado, tardó bastantes años para ser puesto en papel. Con certeza Gauss jamás imaginó que los científicos del siglo XX necesitarían algún apéndice con la demostración de que el algoritmo resultaba computacionalmente eficiente al ser programado en una computadora digital (y de preferencia algunas simulaciones y comparaciones con otros trabajos) pero tuvieron que transcurrir más de cien años para que el mundo captara la importancia de las ideas desarrolladas por Gauss en aquel documento, escrito para mayor infortunio en neolatín.

Epílogo: un cuento chino

Dada la controversia sobre el origen de la Transformada Rápida de Fourier, el doctor T.S. Huang del Massachusetts Institute of Technology consideró que había llegado el momento de terminar con las habladurías, es-

clareciéndolo todo en un artículo publicado en 1971 en la revista *Computer*, bajo el título de "How the Fast Fourier Transform Got its Name".¹³ La parte central de la investigación del doctor Huang establece sin ambigüedades el origen del algoritmo de la siguiente forma:

Con objeto de unificar criterios en la terminología se nombró un comité internacional, cuyo propósito sería determinar de una vez por todas el nombre que debería recibir el eficiente algoritmo. Una vez decidido el nombre, éste sería aceptado y utilizado en todos los países del mundo. El comité se constituyó con miembros de los Estados Unidos, Alemania, Inglaterra, Rusia, Japón y China. La posición de los alemanes fue llamarlo algoritmo 1001 de Gauss. Los ingleses preferían el término The Good Scheme, puesto que el esquema era bueno y con suerte hasta conseguirían que el mundo aceptara que el británico I. J. Good¹² había sido el autor. Los rusos consideraban adecuado dejarle el nombre de Danielson-Cooley-Tukey, dado que era evidente el hecho de que realmente el algoritmo había sido desarrollado por el gran matemático soviético Danisovich Coolytusky. Los japoneses dijeron que a ellos realmente no les importaba cómo quisieran nombrarle, pero en unos meses pondrían disponible en el mercado una versión mejor, de menor tamaño y más barata. Los representantes de la China comunista no dudaron en defender el hecho de que las premisas filosóficas del genial algoritmo habían sido definidas desde siempre en las citas de Mao. La luz se hizo presente en este caos cuando la delegación de la República China en Taiwán aclaró que el eficiente método para obtener los coeficientes de Fourier había sido inventado, al igual que la pólvora, la brújula y todas las cosas prácticas de este mundo, nada menos que por un famoso emperador chino hace 4000 años. Después de deliberar, los distinguidos miembros del comité internacional decidieron de manera unánime que, dado que el emperador chino había inventado el algoritmo aun antes de que todos los demás nacieran, era justo que el método llevara su nombre. El nombre del emperador chino era Fast, Fast Gon Chin para ser exactos, por lo cual el algoritmo es desde entonces conocido como The Fast Fourier Transform.

Evidentemente, lo anterior es sólo un cuento chino. ●

Referencias

1. Cooley, J.W., y J.W. Tukey. "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Mathematics of Computation*, Vol. 19, No. 2, April, 1965, pp. 297-301.
2. Rudnick, P. "Note on the Calculation of Fourier Series", *Mathematics of Computation*, Vol. 20, No. 3, July, 1966, pp. 429-430.
3. Danielson, G.C., y C. Lanczos. "Some Improvements in Practical Fourier Analysis and their Application to X-ray Scattering from Liquids", *Journal of Franklin Institute*, Vol. 233, No. 4/5, April/May, 1942, pp. 365-380, 435-452.
4. Cooley, James W. "How the FFT Gained Acceptance", *IEEE SP Magazine*, January, 1992, pp. 10-13.
5. Cooley, James W. "The Impact of the Fast Fourier Transform - Keynote Address", *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-17, No. 2, June, 1969, pp. 66-68.
6. Cooley, J.W.; P.A. Lewis, y P.D. Welch. "Historical Notes on the Fast Fourier Transform", *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, No. 2, June, 1967, pp. 76-79.
7. Cochran, William T., *et al.* "What is the Fast Fourier Transform", *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, Vol. AU-15, No. 2, June, 1967, pp. 45-55.
8. Oppenheim, A.V. and R.W. Schaffer. *Discrete-Time Signal Processing*, Englewood Cliffs, N. J., 1989, Prentice Hall.
9. Goldstine, H. H. *A History of Numerical Analysis from the 16th Through the 19th Century*, New York, Heidelberg, Berlin, 1977, Springer-Verlag, pp. 249-253.
10. Heideman, T. M.; D. H. Johnson, y C.S Burrus. "Gauss and the History of the Fast Fourier Transform", *IEEE ASSP Magazine*, October, 1984, pp. 14-21.
11. Gauss, C.F., "Nachlass: Theoria Interpolationis Methodo Nova Tractata", in Carl Friederich Gauss, Werke, Band 3, Göttingen, 1866 Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, pp. 265-303.
12. Good, I.J. "The Interaction Algorithm and Practical Fourier Analysis", *J.R. Statist. Soc. B.*, Vol. 20, No. 2, 1958, pp. 361-372.
13. Huang, T.S. "How the Fast Fourier Transform got its Name", *Computer*, Vol. 4, No. 3, May-June, 1971, p. 15.

Los autores

Juan Manuel Ramírez Cortés, autor del artículo "El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier y su controvertido origen", obtuvo el título de ingeniero en comunicaciones y electrónica en el Instituto Politécnico Nacional. Posteriormente realizó los estudios de maestría en ciencias en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica y el doctorado, en la misma materia, con especialidad en electrónica y procesamiento de señales, en la Texas Tech University, en los Estados Unidos. Desde 1992 ha venido realizando actividades académicas y de investigación en la Universidad de Las Américas, en Puebla, donde en la actualidad se desempeña como jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica. Sus líneas de investigación abarcan el procesamiento de señales, las redes neuronales, la lógica difusa y el reconocimiento de patrones. En 1995 fungió como presidente del comité organizador del V Congreso Internacional de Electrónica, Comunicaciones y Computadoras y cuenta con cerca de 50 publicaciones en memorias de congresos y revistas de circulación nacional e internacional.



Ma. del Pilar Gómez Gil, coautora del artículo "El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier y su controvertido origen", realizó sus estudios de licenciatura en ingeniería de sistemas computacionales en la Universidad de las Américas, y posteriormente obtuvo la maestría en ciencias en el Departamento de Ciencias de la Computación en la Texas Tech University, en los Estados Unidos. Desde 1985 forma parte del Departamento de Sistemas Computacionales de la Universidad de las Américas y sus áreas de interés son las redes neuronales, el reconocimiento de patrones y el procesado digital de señales. La maestra Gómez Gil cuenta con cerca de 20 publicaciones en memorias de congresos y revistas nacionales e internacionales.



David Báez López, coautor del artículo "La transformada rápida de Fourier. Crónica de un algoritmo", obtuvo la licenciatura en física en la Universidad Autónoma de Puebla y con posterioridad realizó la maestría y el doctorado en ingeniería eléctrica en la Universidad de Arizona, en Tucson. De 1979 a 1984 trabajó como investigador en el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, y de 1988 a 1996 fungió como jefe del Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad de las Américas, donde actualmente realiza actividades de investigación y docencia. Sus líneas de investigación incluyen los circuitos y sistemas, el procesamiento digital de señales, los filtros activos y la educación. El doctor Báez fue presidente del comité organizador del congreso de electrónica MEXICON 94 y es autor de más de 70 trabajos publicados en revistas y memorias de congresos nacionales e internacionales.