Curvas 2D y 3D

Dr. Rogerio

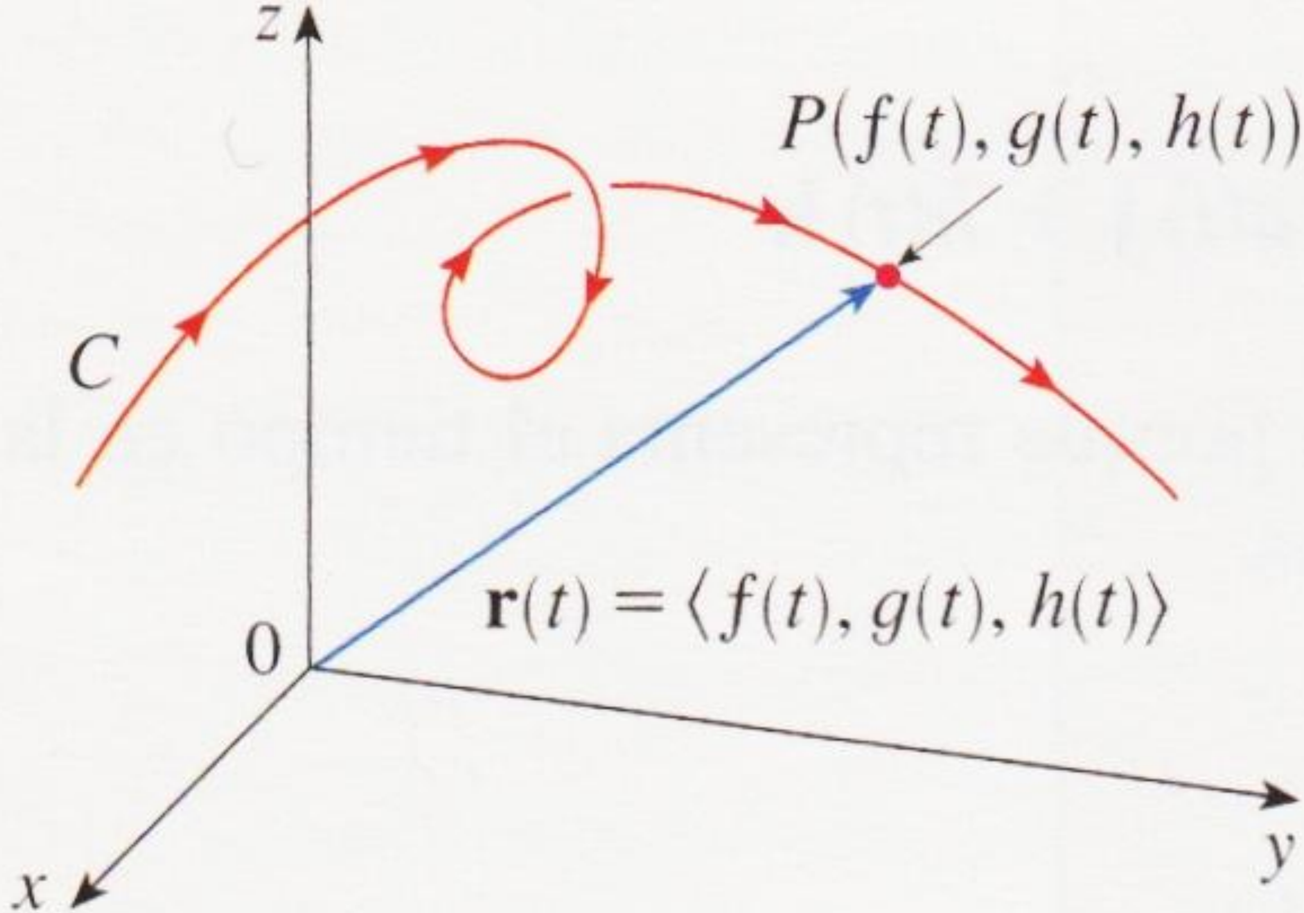
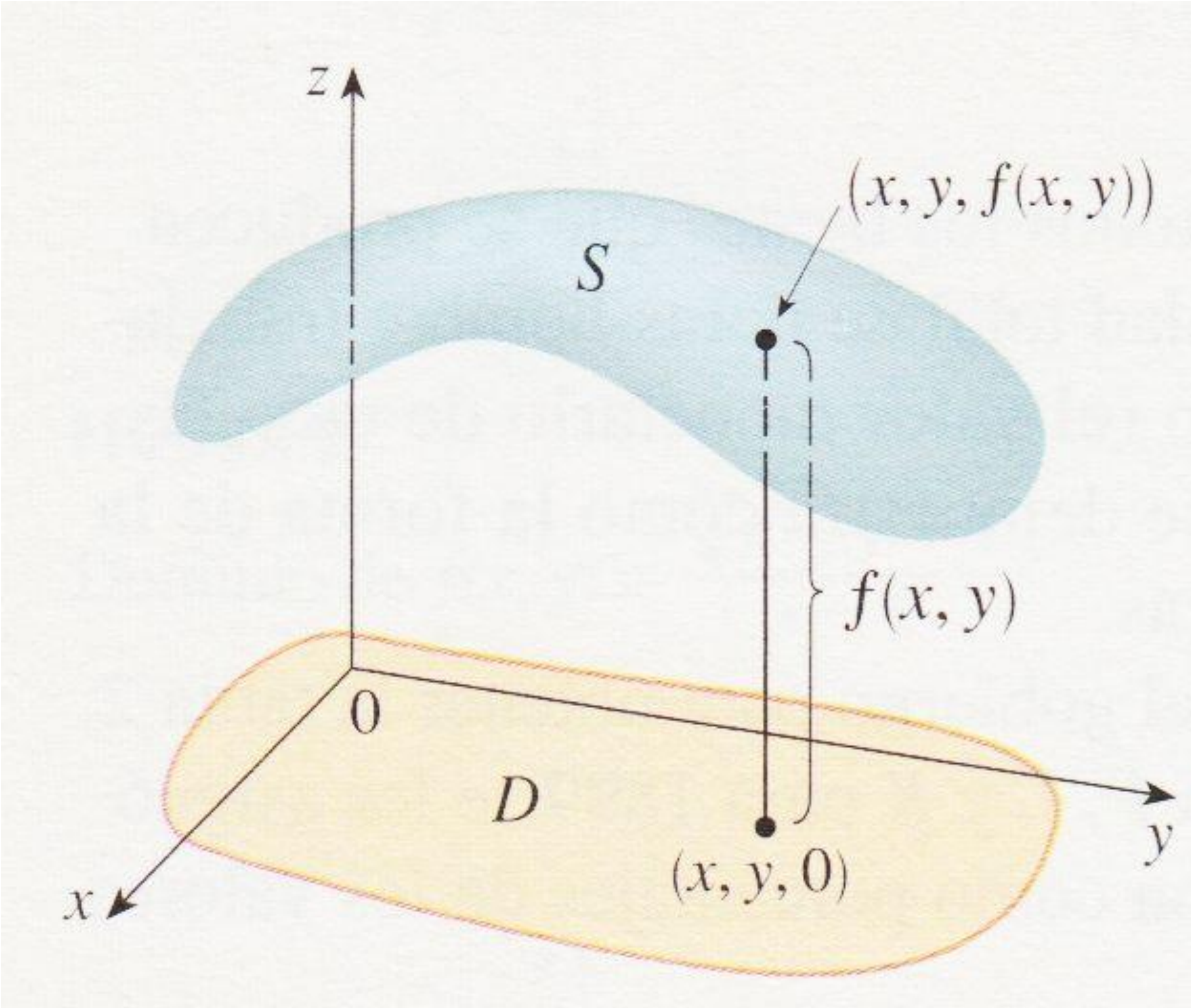


FIGURA 1

La punta de un vector $\mathbf{r}(t)$ de posición que se desplaza traza a C


z
$(x, y, f(x, y))$
S
$f(x, y)$
0
D
y
x
$(x, y, 0)$

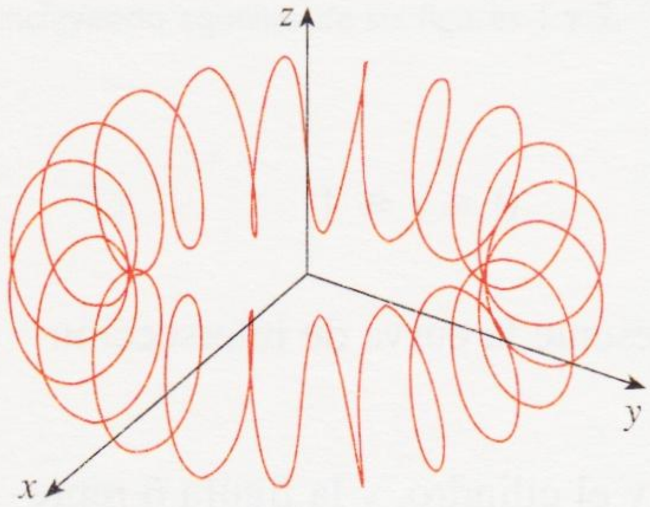


FIGURA 7 Una espiral toroidal

$$x = (4 + \sin 20t)\cos t$$
$$y = (4 + \sin 20t)\sin t$$
$$z = \cos 20t$$

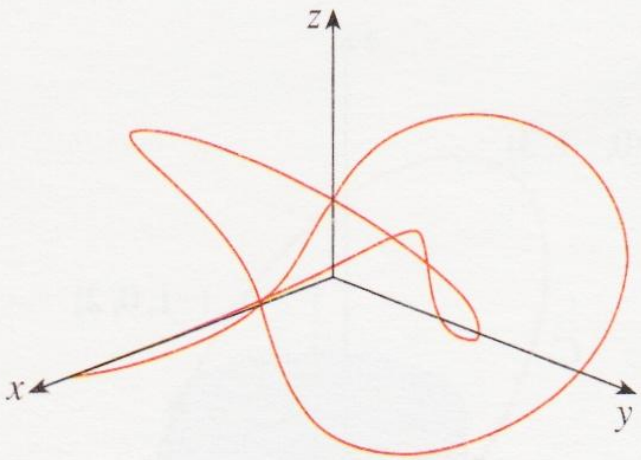


FIGURA 8 Un nudo de trébol

$$x = (2 + \cos 1.5t)\cos t$$
$$y = (2 + \cos 1.5t)\sin t$$
$$z = \sin 1.5t$$

$x = \cos 4t, y = t, z = \sin 4t$

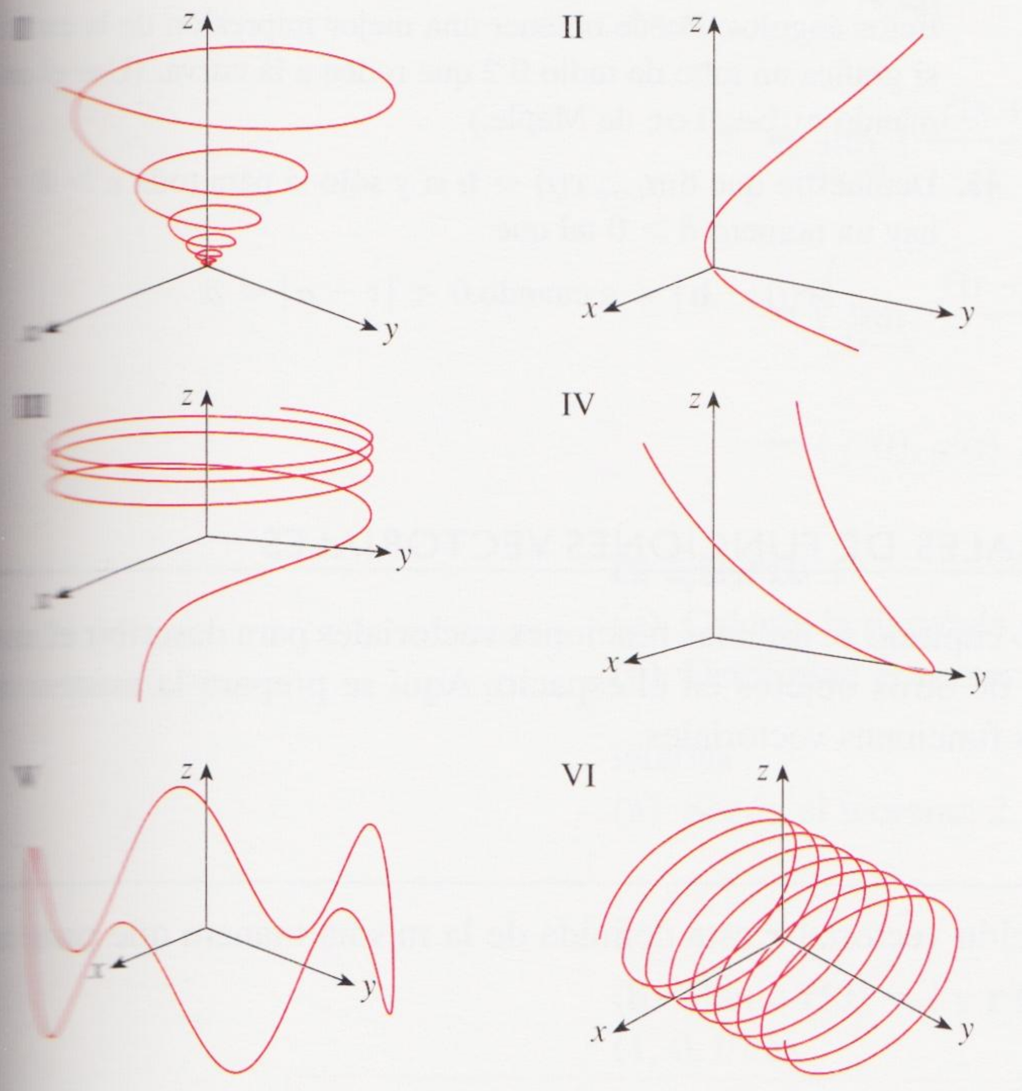
$x = t, y = t^2, z = e^{-t}$

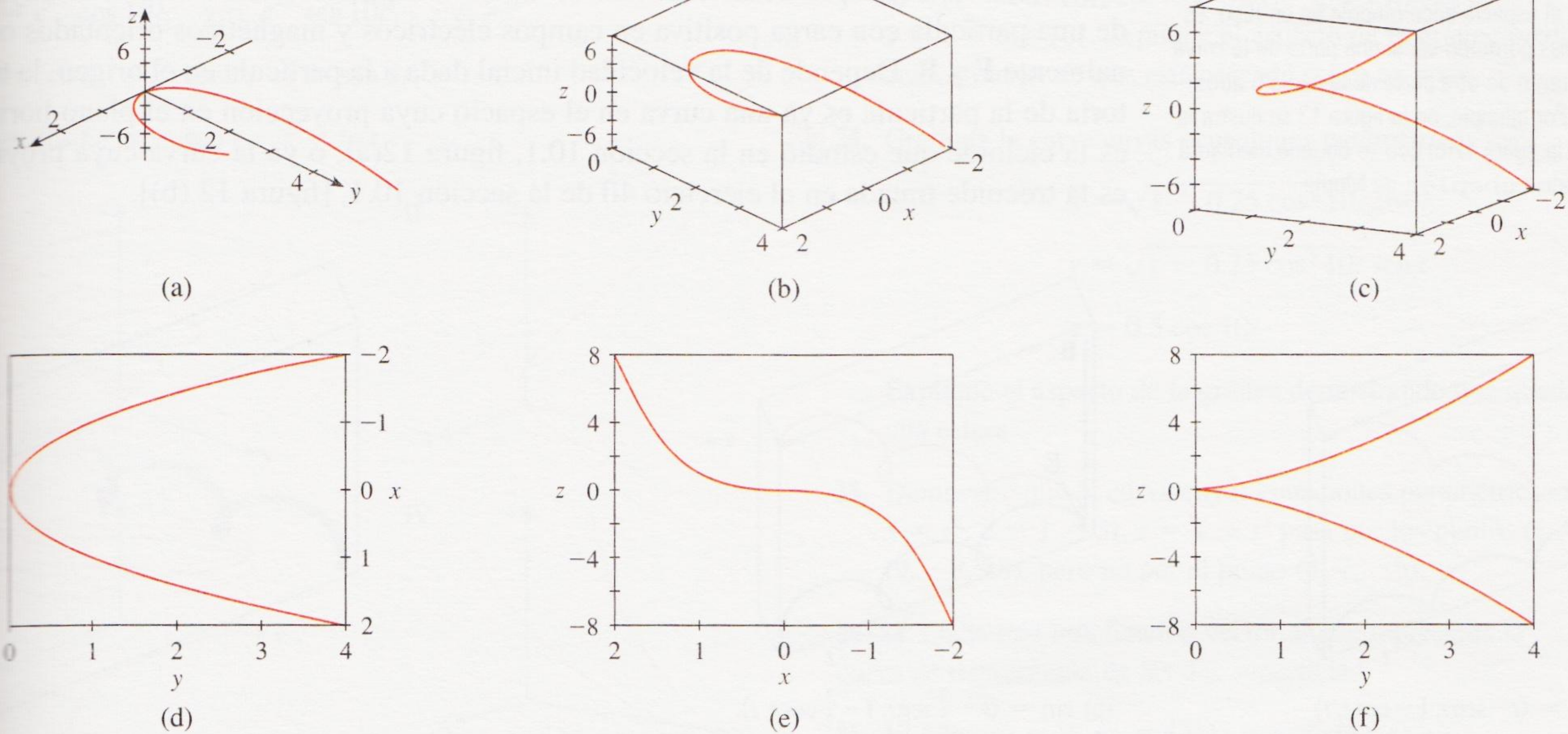
$x = t, \quad y = 1/(1+t^2), \quad z = t^2$

$x = e^{-t} \cos 10t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} 10t, \quad z = e^{-t}$

$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \operatorname{sen} 5t$

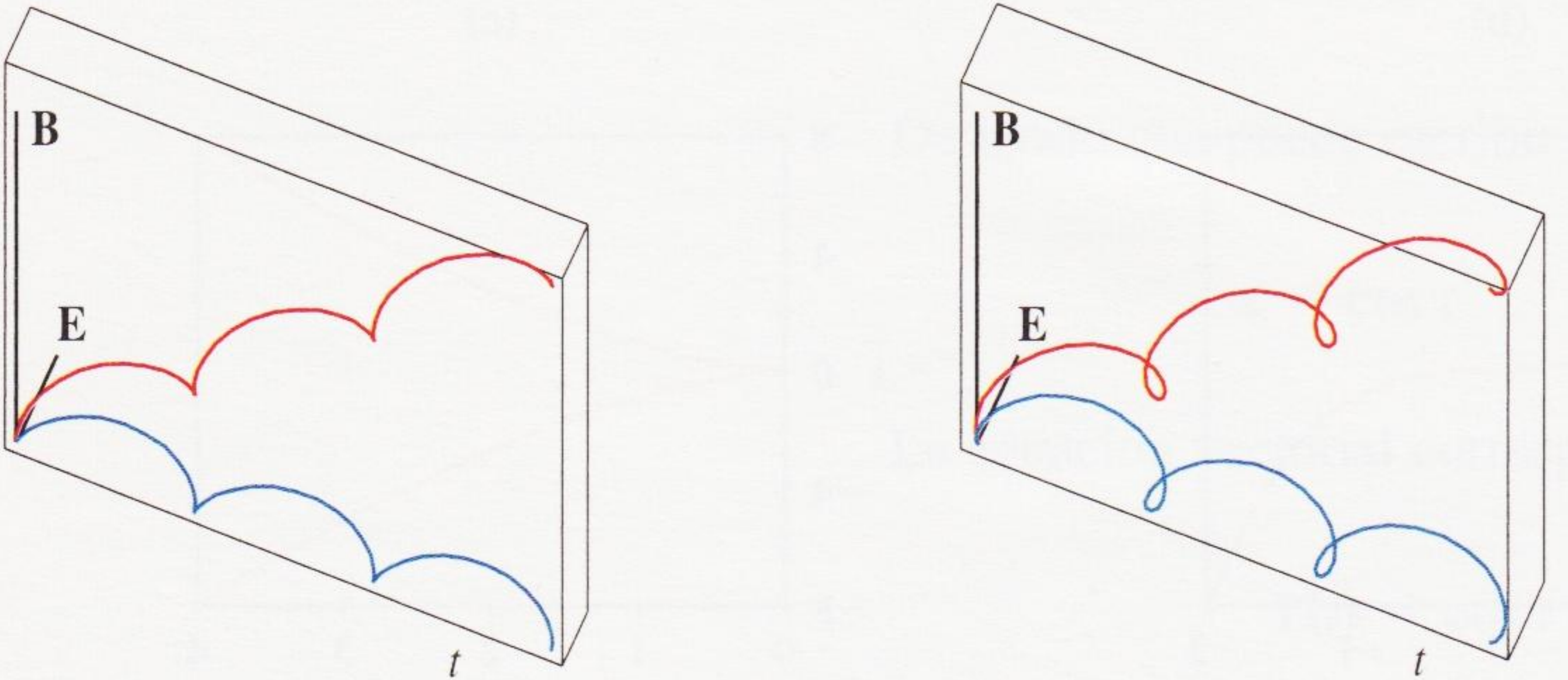
$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \ln t$





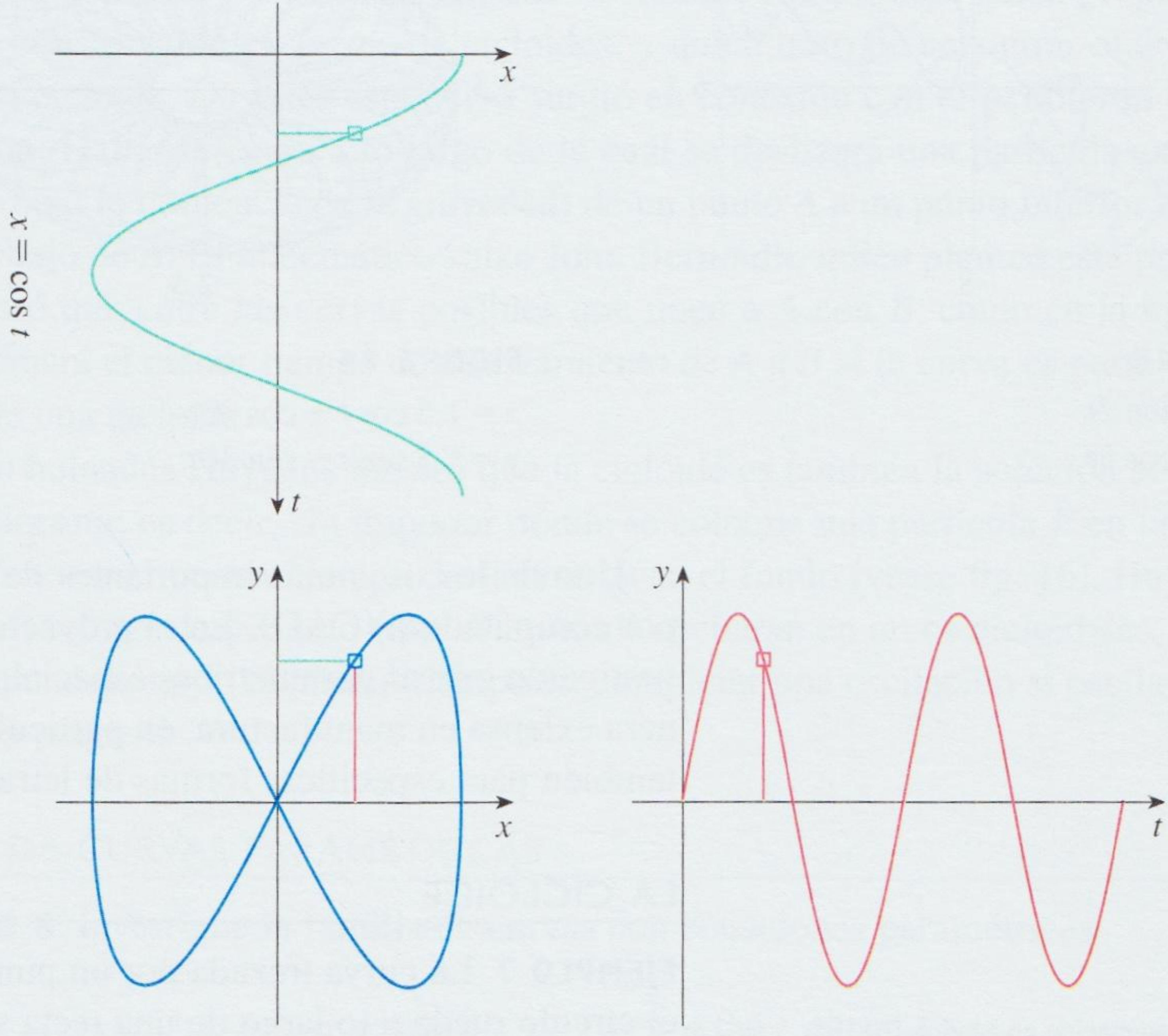
RA 9 Vistas de la cúbica alabeada

$$\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$$

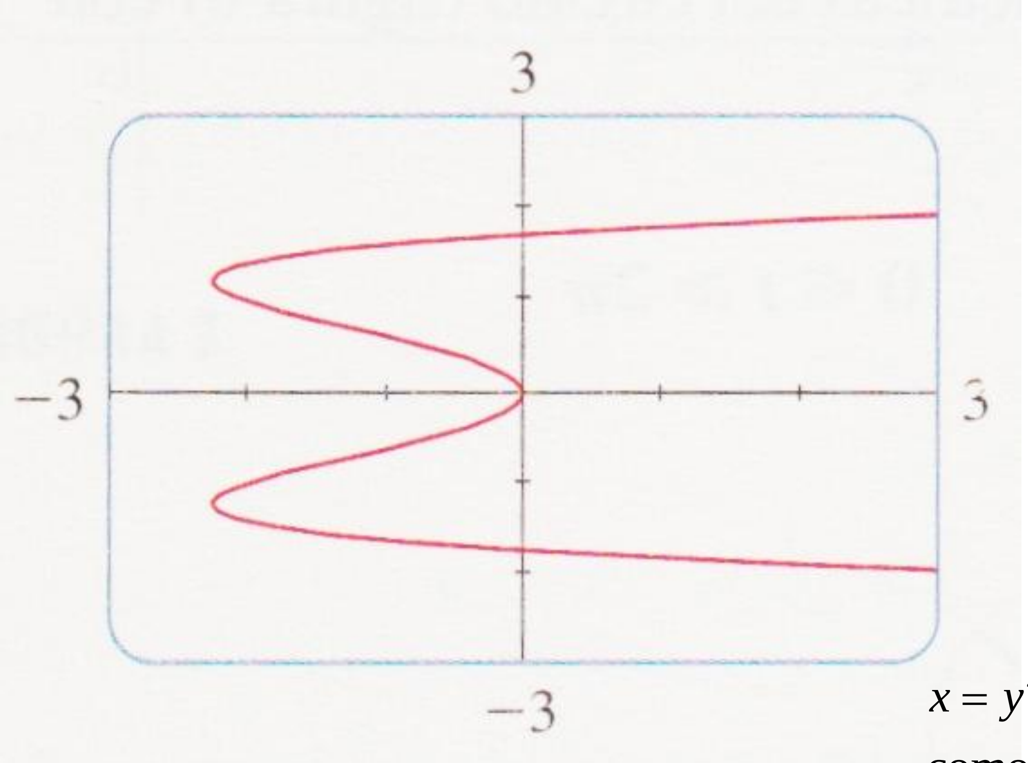


(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t \rangle$

(b) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$



8 $x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} 2t$ $\qquad y = \operatorname{sen} 2t$



$x = y^4 \pm 3y^2$

como función habrá q dividirla en cuatro ecuaciones.

Paremétricamente:

Sea

$y = t$

$x = t^4 \pm 3t^2$

$Normalmente$ haga

$y = t$

$x = g(t)$

$recuerde$

$y = f(x)$

Una función es

$f : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$

x

$f(x)$

$$y = f(x)$$

$f^{-1}(x)$ función inversa

$x = f(y)$

o también podemos hacer la función implicita

$f(x, y) = 0$

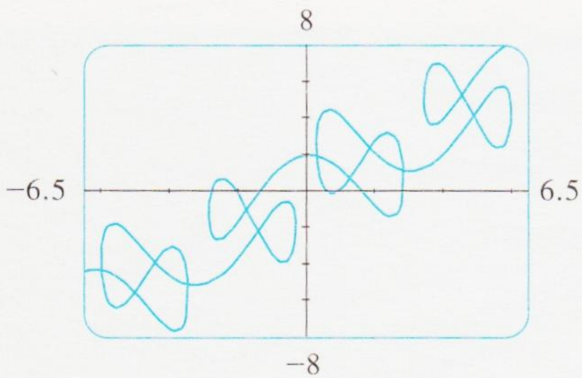


FIGURA 10
$x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$
$y = t + 2 \cos 5t$

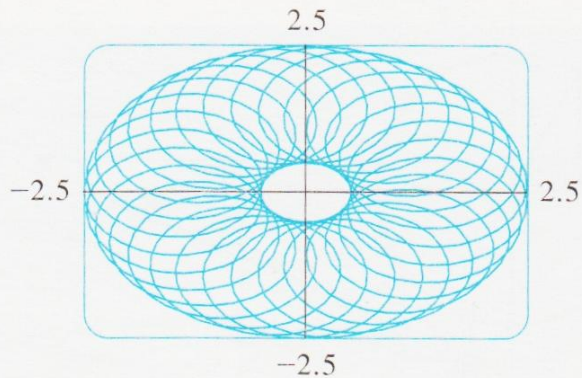


FIGURA 11
$x = 1.5 \cos t - \cos 30t$
$y = 1.5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 30t$

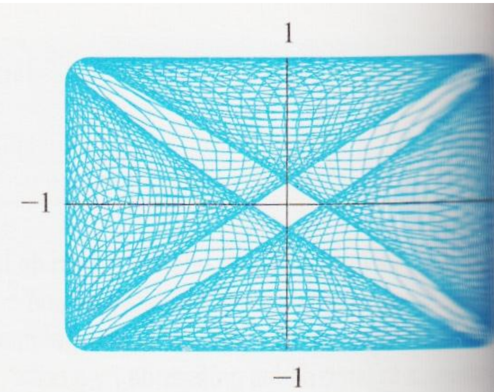
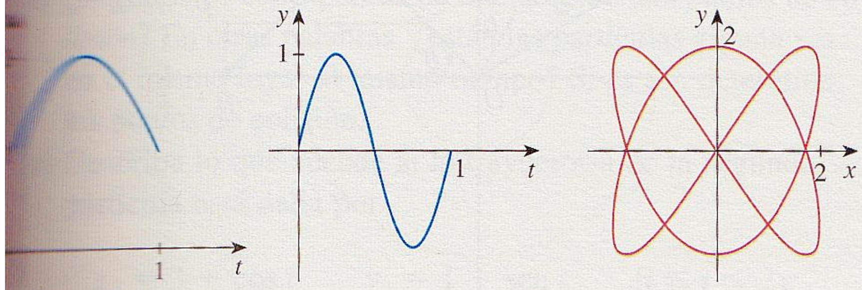
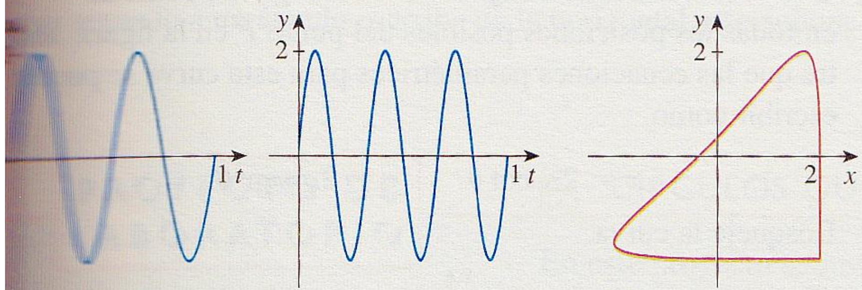


FIGURA 12
$x = \operatorname{sen}(t + \cos 100t)$
$y = \cos(t + \operatorname{sen} 100t)$

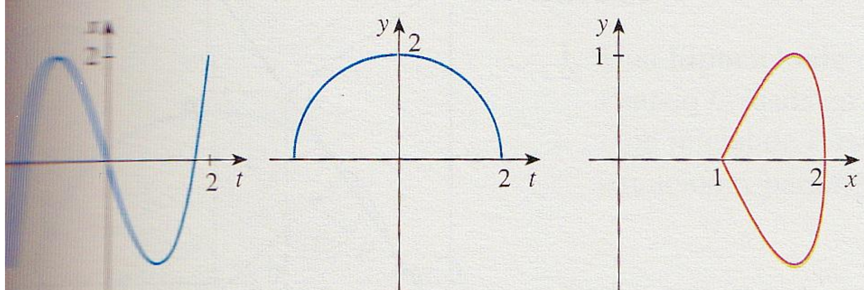
I



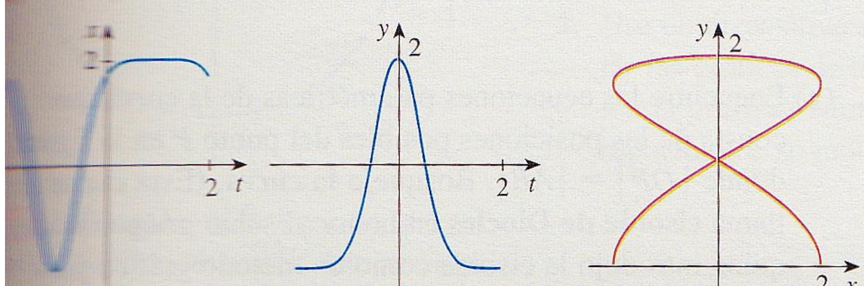
II



III



IV



(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

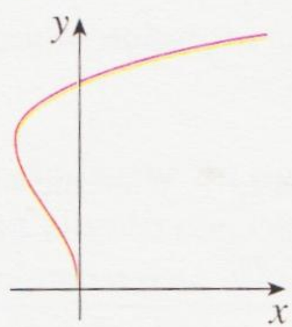
(c) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 2t)$

(d) $x = \cos 5t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

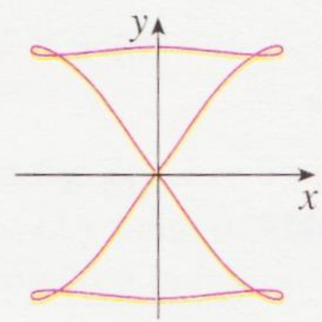
(e) $x = t + \operatorname{sen} 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$

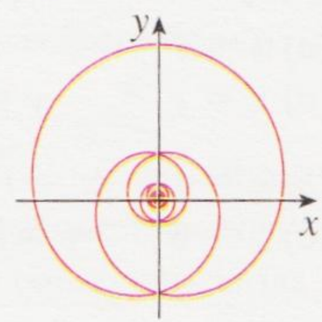
I



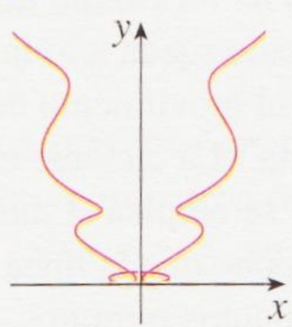
II



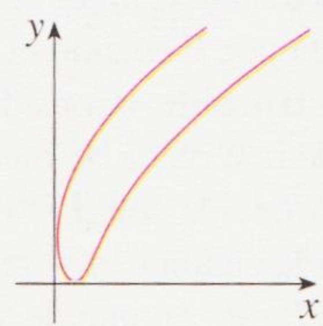
III



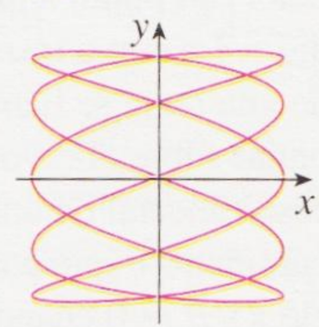
IV



V



VI



$x = 3 + 2\cos t, \quad x = 1 + 2\,\mathrm{sen}\, t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

$x = 2\,\mathrm{sen}\, t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

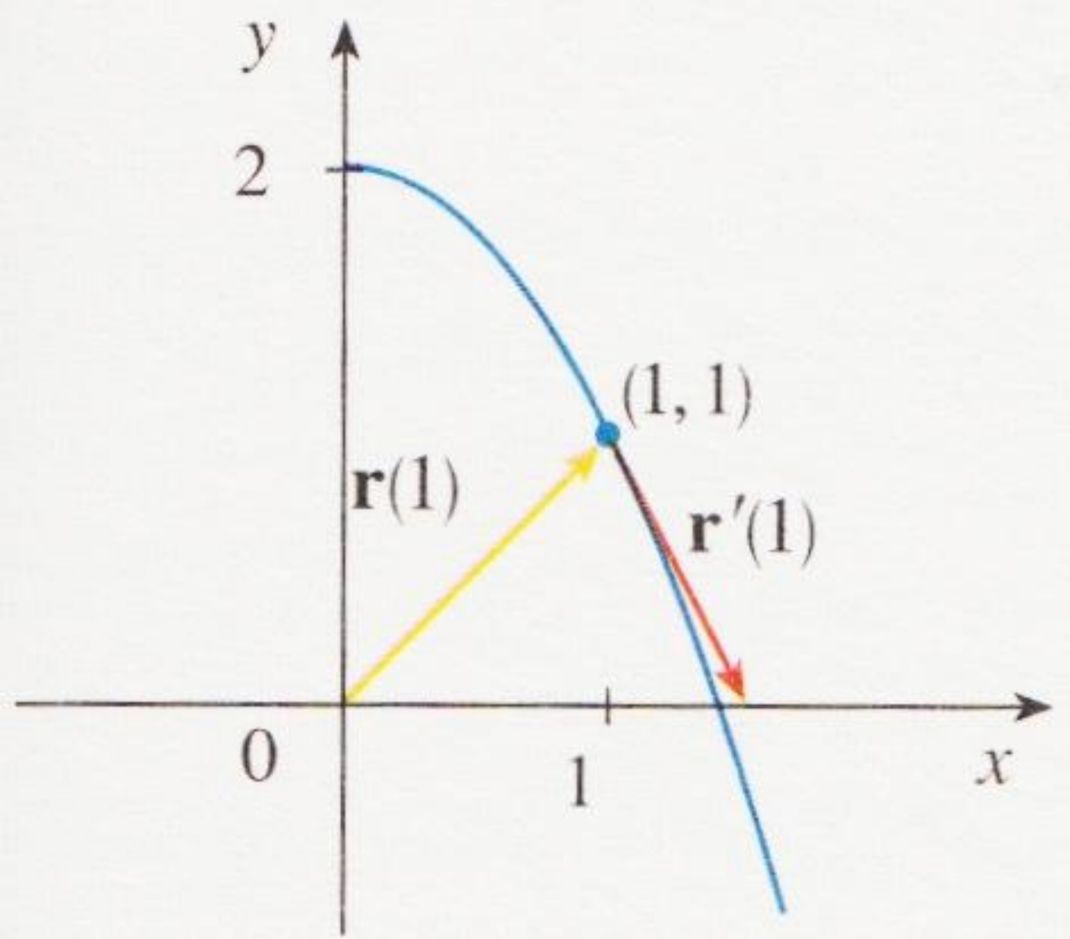
$x = 5\,\mathrm{sen}\, t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

$x = \mathrm{sen}\, t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

Derivadas

$\boxed{2}$ **TEOREMA** Si $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$, donde f, g y h son funciones derivables, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle = f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$



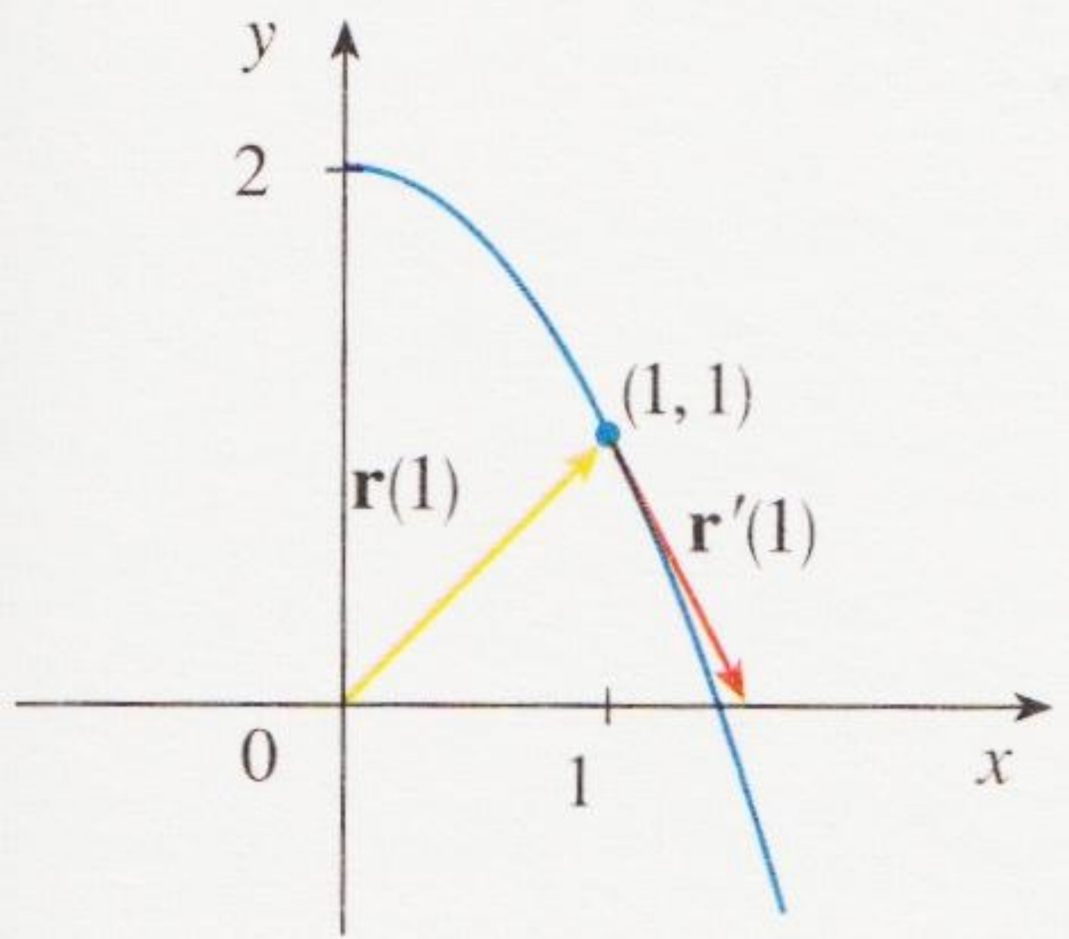
$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\ \mathbf{i} + (2 - t)\,\mathbf{j}$$

calcule

$\mathbf{r}'(t)$

$\mathbf{r}(1)$

$\mathbf{r}'(1)$



$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\ \mathbf{i} + \left(2 - t\right)\mathbf{j}$$

calcule

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Vector Normal y Binormal

$\mathbf{r}(t)$

derivando

$\mathbf{r}'(t) \leftarrow$ tangente a la curva trayectoria

unitario

$$\boxed{\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\left\|\mathbf{r}'(t)\right\|}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}(t)\bullet\mathbf{T}(t) = 1 \rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{T}(t)\bullet\mathbf{T}(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{T}'(t)\bullet\mathbf{T}(t) + \mathbf{T}(t)\bullet\mathbf{T}'(t) = 0$$

$$\therefore \qquad \mathbf{T}(t)\bullet\mathbf{T}'(t) = 0 \Rightarrow \mathbf{T}'(t) \perp \mathbf{T}(t)$$

defina

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\left\|\mathbf{T}'(t)\right\|}} \quad \leftarrow \text{ normal unitario principal a la curva trayectoria}$$

tome ahora

$$\boxed{\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)} \quad \leftarrow \text{ Binormal}$$

Velocidad y Aceleración

$\mathbf{r}'(t) \leftarrow$ es la velocidad

$\mathbf{v}(t) \triangleq \mathbf{r}'(t)$

$\mathbf{a}(t) \triangleq \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \quad \leftarrow \quad$ aceleración

la magnitud es la rapidez

$\left\| \mathbf{r}'(t) \right\|$

INTEGRALES

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \int f(t)dt\mathbf{i} + \int g(t)dt\mathbf{j} + \int h(t)dt\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \int_a^b f(t)dt\mathbf{i} + \int_a^b g(t)dt\mathbf{j} + \int_a^b h(t)dt\mathbf{k}$$

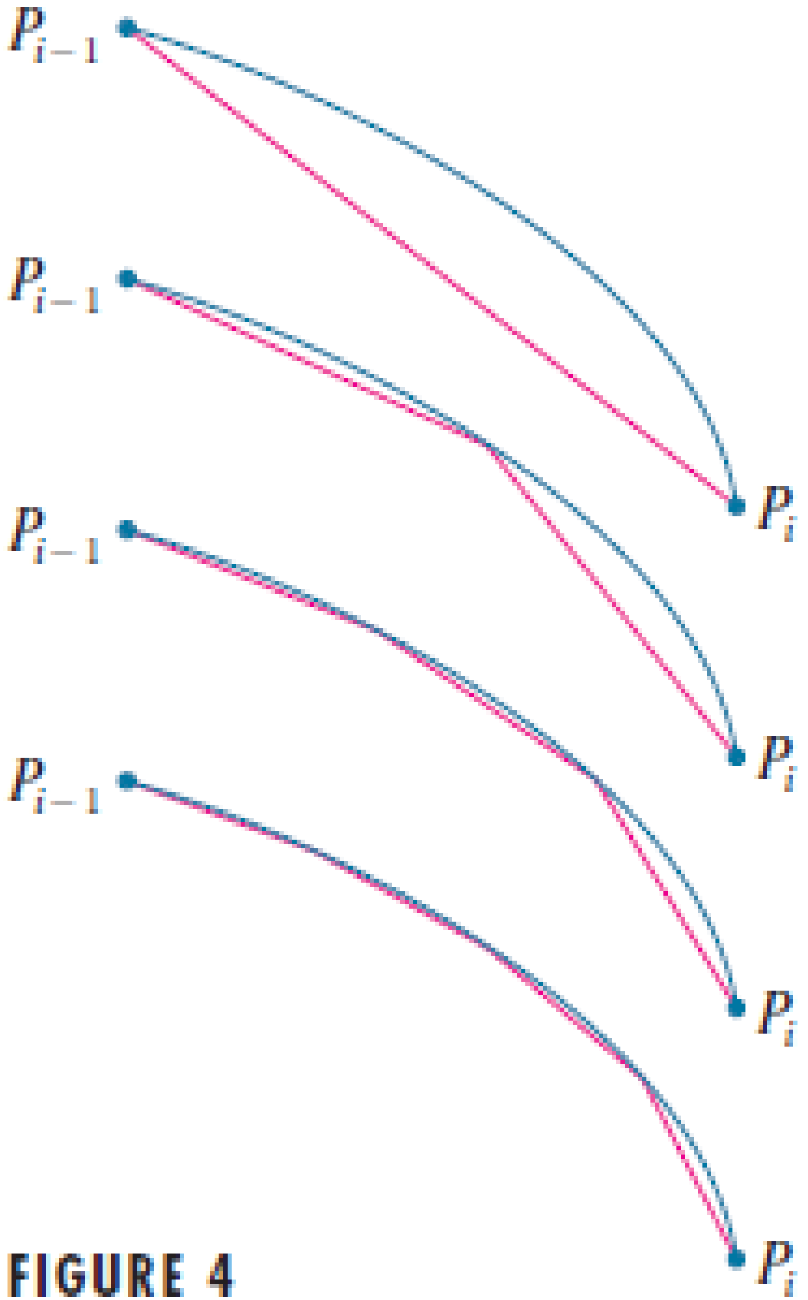
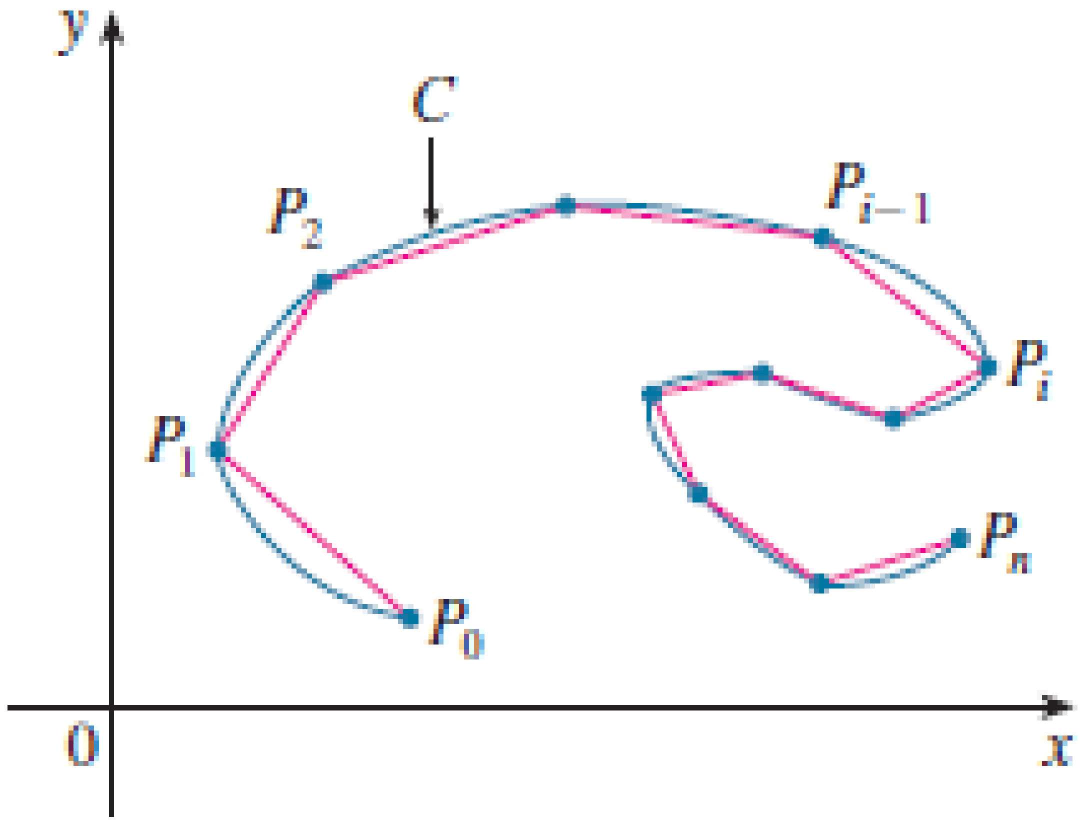


FIGURE 4


y
C
P_2
P_{i-1}
P_i
P_1
P_n
P_0
0
x

Geometría

- Curvatura

$$\kappa \triangleq \frac{\left\|\mathbf{T}'(t)\right\|}{\left\|\mathbf{r}'(t)\right\|} = \frac{\left\|\mathbf{T}'(t)\right\|}{\left\|\mathbf{v}(t)\right\|}$$

Geometría y Física

¿Se podrán poner directamente en términos de $\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$?

¿sumar, restar, multiplicar?

$$\mathbf{v}(t)\bullet\mathbf{a}(t)$$

$$\mathbf{v}(t)\times\mathbf{a}(t)$$

$i)$

$$\mathbf{v}(t)\bullet\mathbf{a}(t) = \|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}(t)\bullet\left[\|\mathbf{v}(t)\|'\mathbf{T}(t) + \kappa\|\mathbf{v}(t)\|^2\mathbf{N}(t)\right] =$$

$$= \|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}(t)\bullet\|\mathbf{v}(t)\|'\mathbf{T}(t) + \|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}(t)\bullet\kappa\|\mathbf{v}(t)\|^2\mathbf{N}(t)$$

pero

$$\mathbf{T}(t)\bullet\mathbf{T}(t) = 1$$

$$\mathbf{T}(t)\bullet\mathbf{N}(t) = 0$$

$$\|\mathbf{v}(t)\|\|\mathbf{v}(t)\|' \overset{?}{=} \mathbf{r}'(t)\bullet\mathbf{r}''(t) \Rightarrow \boxed{\|\mathbf{v}(t)\|' = \frac{\mathbf{r}'(t)\bullet\mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}} \leftarrow \boxed{a_T}$$

Geometría y Física

$ii)$

$$\mathbf{v}(t)\times\mathbf{a}(t)=\|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}(t)\times\left[\|\mathbf{v}(t)\|'\mathbf{T}(t)+\|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}'(t)\right]=$$

$$=\|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}(t)\times\|\mathbf{v}(t)\|'\mathbf{T}(t)+\|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}(t)\times\|\mathbf{v}(t)\|\mathbf{T}'(t)$$

pero

$$\mathbf{C}\times\mathbf{C}=\mathbf{0}\quad\therefore\quad\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}(t)=0$$

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2\,\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t)=\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)$$

varios datos que sabemos $\mathbf{T}(t)\perp\mathbf{T}'(t)$ y además $\|\mathbf{T}(t)\|=1$

$$\therefore\quad\|\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t)\|\overset{?}{=}\|\mathbf{T}(t)\|\|\mathbf{T}'(t)\|\overset{?}{=}\|\mathbf{T}'(t)\|$$

asi que tomemos puras magnitudes

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2\,\|\mathbf{T}(t)\times\mathbf{T}'(t)\|\overset{?}{=}\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|\rightarrow\|\mathbf{T}'(t)\|=\frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^2}$$

y ya podremos escribir la aceleración normal como la buscamos.

Por otro lado, nos permite escribir la curvatura también como

$$\kappa\triangleq\frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}=\frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

por lo que facilmente se obtiene

$$\boxed{a_N\overset{?}{=}\frac{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}}$$

Curvas

- r(t)   es 3D?
- Graficas de x**2 y x**3

- Soluciones

Imaginarios

- i=sqrt(-1) i.e. i**2=1

- Ahora podemos tener RxI
- Cuyos elementos son pares ordenados (a,b)
- Los R los puedo escribir como (a,0)
- Los I los puedo escribir como (0,b)

Suma

- $(a,b)+(c,d)=$
- Neutro aditivo?
- Inverso aditivo?
- Como lo obtuvo?

Multiplicacion

- $(a,b)(c,d)=$

- Como se le ocurrio?

- Neutro multiplicativo
- $(a,b)(?,??)=(a,b)$

- Como encontrarlo?

Inverso multiplicativo

- (a,b)(?,??)=(1,0)

- Como lo encontro?

- Los Reales es un subconjunto de C=RxI cuyos elementos son (a,0)
- Y los I son un subconjunto de C cuyos elementos son (0,b)

- Pero los I no es cerrado wrt la multiplicacion

- Por que?

- $(0,b)(0,d)=(-bd,0)= -bd$
- En particular
- $(0,1)(0,1)=-1$

- Oceano $i=(0,1)$ que significa que i**2=-1

- Si b esta en los R entonces
- $(b,0)(0,1)=(0,b)=ib$
- Por tanto
- $(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+ib$

- Y ahora podemos encontrar mas facilmente la division

$$\frac{a+ib}{c+id}$$

con

$$c+id \neq 0$$

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}.\frac{c-ib}{c-id}=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$z,\overline{z}$$

$$\overline{z+w}=$$

$$\overline{zw}$$

$$\overline{z}=z$$

iff

$$z \in \mathbb{R}$$

$$\overline{z^n}=\overline{z}^n$$