Mecánica clásica

El trabajo

El trabajo hecho por una fuerza constante en una dimensión

El trabajo W hecho sobre un objeto, por un agente externo ejerciendo una fuerza constante en el objeto, es el producto de la fuerza y de la magnitud del desplazamiento:

$$W = F * l$$

El trabajo hecho por una fuerza variable

$$\boxed{W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

$$\vec{F} = \left(F_x, F_y . F_z\right) \ ; \qquad d\vec{l} = \left(dx, dy, dz\right)$$

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y \, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z \, dz$$

El trabajo

¡¡¡El trabajo, en general, depende de la trayectoria!!!

La energía cinética

La energía cinética

$$K \equiv \frac{1}{2} m \left| \vec{v} \right|^2$$

$\Rightarrow$ La energía cinética es una cantidad escalar.

$\Rightarrow$ Sus unidades son las mismas que las del trabajo, Joules y Ergios.

La energía cinética

$$W = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m \frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$= m \int_{v_i}^{v_f} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Teorema del trabajo y la energía cinética

Si una fuerza externa actua sobre una partícula, causando que su energía cinética cambie de K_i a K_f, entonces el trabajo mecánico está dado por

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Se deben incluir todas las fuerzas que hagan trabajo en la partícula en el cálculo del trabajo neto hecho.

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Con este teorema vemos que la velocidad de una partícula crece si el trabajo neto hecho en ella es positivo, porque la energía cinética final es mayor que la energía cinética inicial.

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

La velocidad de una partícula decrece si el trabajo neto hecho en ella es negativo, porque la energía cinética final es menor que la energía cinética inicial.

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Este teorema nos permite pensar en la energía cinética como en el trabajo que puede hacer la partícula cuando llegue al reposo, o como la cantidad de energía almacenada en la partícula.

El trabajo

¡¡¡El trabajo, en general, depende de la trayectoria!!!

La otra posibilidad y para simplificar pudiera pensarse que NO dependa de la trayectoria!!!!!

Fuerzas conservativas

Un campo de fuerzas $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si el trabajo realizado para desplazar una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida con tal que el punto inicial y el punto final coincidan.

Fuerzas conservativas

El nombre conservativo se debe a que para un campo de fuerzas de ese tipo existe una forma especialmente simple de la ley de la conservación de la energía

La energía potencial y la conservación de la energía

La energía potencial

La energía potencial es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo W, dependiendo de la configuración que tengan en un sistema de cuerpos que ejercen fuerzas entre sí.

La energía potencial

La energía potencial es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo *W*, dependiendo de la configuración que tengan en un sistema de cuerpos que ejercen fuerzas entre sí.

Puede pensarse como la energía almacenada en un sistema, o como una medida del trabajo que un sistema puede entregar.

La energía potencial

La energía potencial es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo W, dependiendo de la configuración que tengan en un sistema de cuerpos que ejercen fuerzas entre sí.

La energía potencial es una magnitud escalar asociada a un campo de fuerzas (o como en elasticidad un campo tensorial de tensiones).

La energía potencial

La energía potencial es la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo *W*, dependiendo de la configuración que tengan en un sistema de cuerpos que ejercen fuerzas entre sí.

Cuando la energía potencial está asociada a un campo de fuerzas, la diferencia entre los valores del campo en dos puntos A y B es igual al trabajo realizado por la fuerza para cualquier recorrido entre B y A.

Para simplificar ideas y calculos
Fuerzas conservativas

Un campo de fuerzas $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si el trabajo realizado para desplazar una partícula entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida con tal que el punto inicial y el punto final coincidan.

El nombre conservativo se debe a que para un campo de fuerzas de ese tipo existe una forma especialmente simple de la ley de la conservación de la energía

Fuerzas conservativas

Un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativo si pasa cualquiera de estas cuatro cosas:

1) Existe un campo escalar $U:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U$

2) El trabajo (que no es mas que decir lo mismo pero en forma integral)

$$W = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

a lo largo de un camino cualquiera *C*, a través del campo de fuerza, depende sólo de los puntos inicial y final y no de la trayectoria.

3) El trabajo por una curva cerrada *C* es cero; es decir, $W = \oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

4) El campo de fuerzas es simplemente continuo y cumple la condición

$\nabla \times \vec{F} = 0$ (que no es mas que decir lo mismo pero en forma diferencial)

Fuerzas conservativas

Existe un campo escalar $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

tal que $\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -\nabla U$.

Como

$$W = \int_C \vec{F}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{r}$$

tenemos

$$W = -\int_C \nabla U \cdot d\vec{r} = -\Delta U$$

Fuerzas conservativas

$$\boxed{W = -\Delta U \equiv U_i - U_f}$$

El trabajo que realiza una fuerza conservativa sobre un móvil, entre dos puntos cualesquiera del espacio, es igual a la variación de la función escalar U entre esos dos puntos, cambiada de signo.

La función escalar U es llamada la energía potencial.

Fuerzas conservativas

$$\boxed{W = -\Delta U \equiv U_i - U_f}$$

"Despejando"

$$U\left(\vec{r}_f\right) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} + U\left(\vec{r}_i\right)$$

Ejemplos de fuerzas conservativas

$\Rightarrow$ La fuerza gravitacional

$\Rightarrow$ Las fuerzas elásticas

$\Rightarrow$ La fuerza electrostática

Fuerzas no conservativas

Una fuerza que no es conservativa es "no conservativa"
DAAAAAA!!!!

$\Rightarrow$ Es lo contrario de una fuerza conservativa.

$\Rightarrow$ Una fuerza no conservativa realiza más trabajo cuando aumenta la longitud del camino recorrido.

Las fuerzas de fricción

La fuerza magnética

Relación entre las fuerzas conservativas y la energía potencial

Un campo de fuerzas $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ es conservativo

si existe un campo escalar $U:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

tal que

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -\nabla U$$

Relación entre las fuerzas conservativas y la energía potencial

Como

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = -\nabla U$$

se tiene, de la segunda ley de Newton,

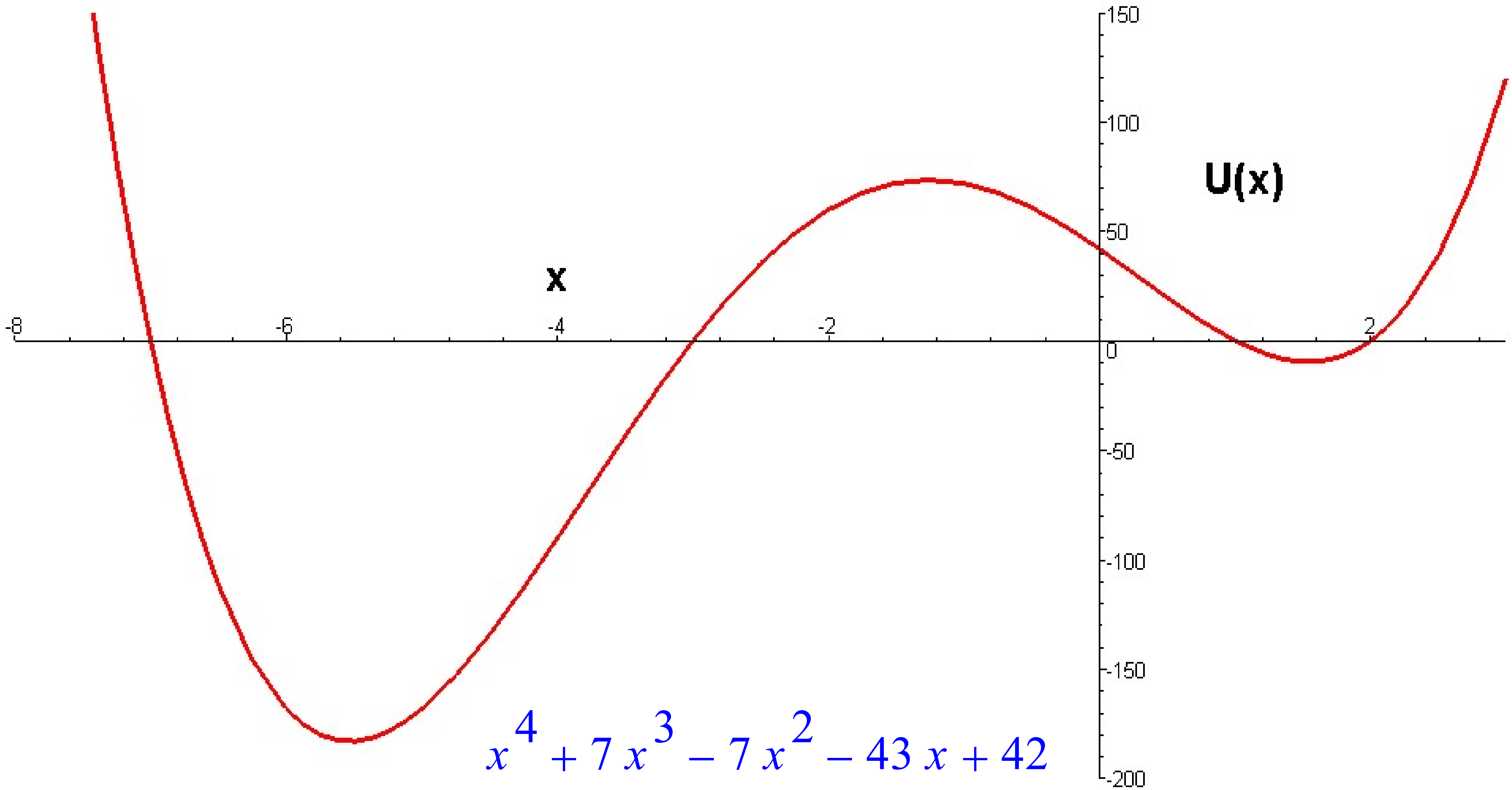
$$m\frac{d^2\vec{r}\left(t\right)}{dt^2} = \vec{F}\left(\vec{r}\right) = -\nabla U$$

o bien

$$m\frac{d^2\vec{r}\left(t\right)}{dt^2} = -\nabla U$$

Diagramas de energía y el equilibrio de un sistema

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F_x(x)=-\frac{dU(x)}{dx}$$



$$x^4+7x^3-7x^2-43x+42$$

Ejemplos de campos conservativos

$$\Rightarrow \vec{F}\left(\vec{r}\right) = -mg\hat{k}$$

$$\Rightarrow F\left(x\right) = -kx$$

$$\Rightarrow \vec{F}\left(\vec{r}\right) = -k\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{F}\left(\vec{r}\right) = -\lambda \frac{\vec{r}}{r^2}$$

La energía mecánica

Se define la energía mecánica total E de un sistema, como la suma de la energía cinética y la energía potencial; es decir,

$$E \equiv K + U$$

Conservación de la energía mecánica

En un sistema aislado, y sin fuerzas no conservativas, la energía mecánica total E se conserva; es decir,

$$E_i \equiv K_i + U_i = K_f + U_f \equiv E_f$$

Conservación de la energía mecánica

$$\boxed{E_i \equiv K_i + U_i = K_f + U_f \equiv E_f}$$

El que un sistema sea aislado quiere decir que ni se le añade ni se le quita energía.

Conservación de la energía

⇒ La energía no puede ser creada ni destruida.

⇒ La energía puede transformarse de una forma a otra, pero la energía total de un sistema aislado siempre es constante.

Conservación de la energía

$\Rightarrow$ Desde un punto de vista universal, podemos decir que la energía total del Universo es constante.

$\Rightarrow$ Si una parte del Universo gana energía en alguna forma, entonces otra parte debe perder una cantidad igual de energía.

$\Rightarrow$ Nunca se ha observado una violación de este principio.

Conservación de la energía

En la parte de Termodinámica veremos la primera ley, que es la ley de conservación de la energía.

Conservación del momento lineal para un sistema de dos partículas

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

La tercera ley de Newton establece que:

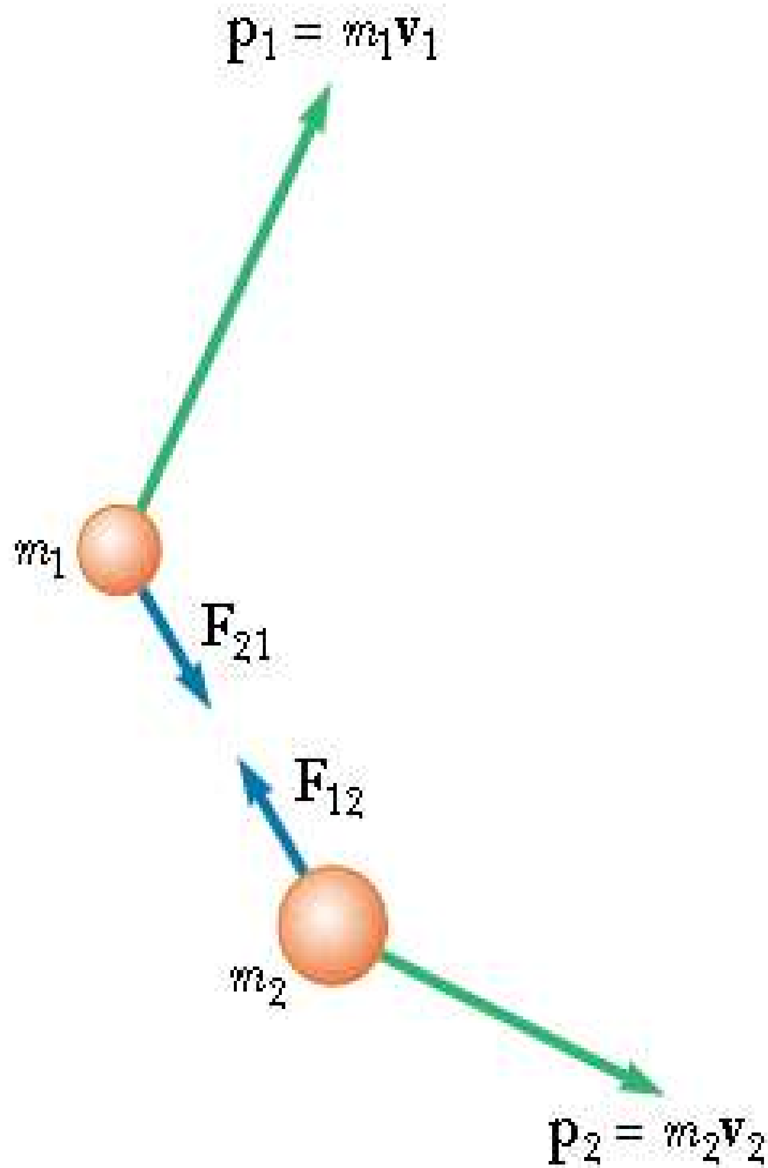
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

ó

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = 0$$



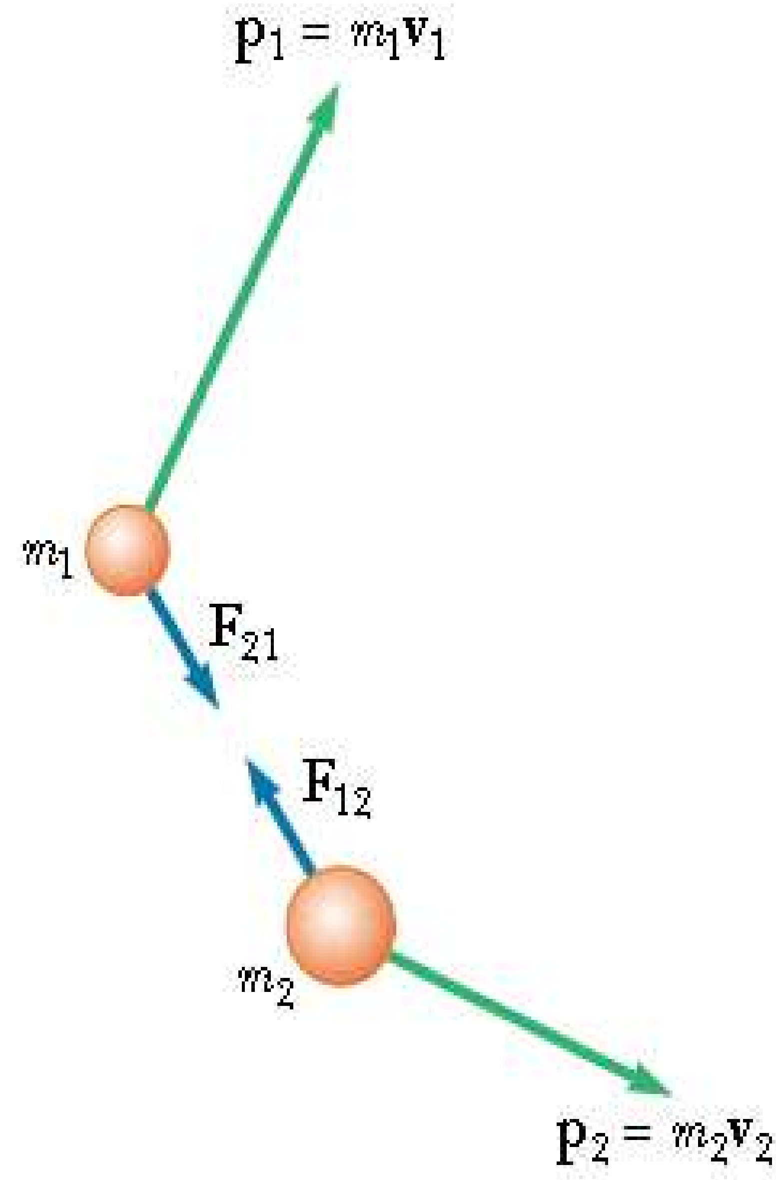
Conservación del momento lineal para un sistema de dos partículas

Por lo tanto

$$\vec{p}_{Tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{constante}$$

o equivalentemente

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$



Conservación del momento lineal

Siempre que de dos o más partículas interactuen en un sistema aislado, el momento lineal del sistema permanece constante.

El momento lineal total de un sistema aislado se conserva.

El impulso y el momento lineal

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

Se define el impulso I como

$$\vec{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

El impulso y el momento lineal

Introduciendo

el promedio en el tiempo de la fuerza

$$\left\langle \vec{F}(t) \right\rangle = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

tenemos

$$\vec{I} = \Delta t \left\langle \vec{F}(t) \right\rangle$$

El impulso y el momento lineal

Si la fuerza es constante $\vec{F}$ en el intervalo de tiempo $\left(t_i, t_f\right)$,

$$\left\langle \vec{F}(t) \right\rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \vec{F}$$

e

$$\vec{I} = \Delta t * \vec{F}$$

El impulso y el momento lineal

Si una fuerza actua sobre una partícula por un intervalo de tiempo muy breve, pero es mucho mayor que cualquier otra fuerza presente, tenemos

$$\vec{I} = \Delta t * \vec{F}$$

que es la aproximación impulsiva.

El impulso y el momento lineal

$$\boxed{\vec{I} = \Delta t * \vec{F}}$$

Esta aproximación es especialmente útil cuando se estudian colisiones en las cuales el tiempo de colisión es muy corto. Cuando se esta aproximación, se refiere una a la fuerza como una fuerza impulsiva.

Al haber introducido estadistica popdemos entonces comprender la definicion de delta de dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = \begin{Bmatrix} 1 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{Bmatrix}$$

El impulso y el momento lineal

$$\boxed{\vec{I} = \Delta t * \vec{F}}$$

Es importante recordar que en esta aproximación $\vec{p}_i$ y $\vec{p}_f$ representan el momento lineal inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión, respectivamente.

El impulso y el momento lineal

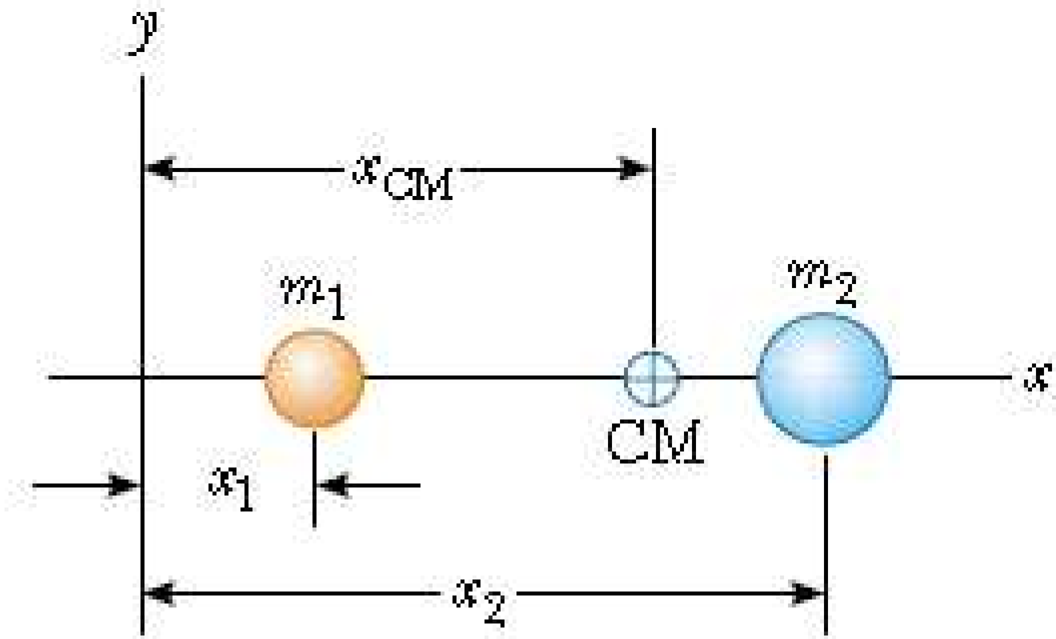
$\vec{I} = \Delta t * \vec{F}$

Es importante recordar que en esta aproximación $\vec{p}_i$ y $\vec{p}_f$ representan el momento lineal inmediatamente antes e inmediatamente después de la colisión, respectivamente.

Por lo tanto, en cualquier situación en la cual es correcto utilizar la aproximación impulsiva, la partícula se mueve muy poco durante la colisión.

Suponga dos partículas que se describen desde su centro de masa

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$



Momento lineal total de un sistema de partículas

$$\boxed{\vec{p}_{Tot} = M\vec{v}_{CM}}$$

$\Rightarrow$ El momento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

$\Rightarrow$ El momento lineal total del sistema es igual al de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad $\vec{v}_{CM}$.

Aceleración del centro de masa

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}}$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i$$

ó sea

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

La segunda ley de Newton para un sistema de partículas

Las fuerzas en cualquiera de las partículas del sistema deben incluir la fuerza externas (desde fuera del sistema) y la fuerzas internas (aquellas ejercidas dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna ejercida por la partícula i en la particula j, es igual en magnitud y opuesta en dirección, a la fuerza interna ejercida por la partícula j en la particula i. Por tanto, cuando se suma sobre todas las fuerzas internas en

$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$ se cancelan por pares y la

fuerza neta en el sistema es causada unicamente por las fuerzas externas.

La segunda ley de Newton para un sistema de partículas

Por tanto,

$$M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{Tot}}{dt} = \sum \vec{F}_{Ext}$$

La fuerza externa resultante en un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa.

La segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{Tot}}{dt} = \sum \vec{F}_{Ext}$$

El centro de masa de un sistema de particulas de masa combinada *M* se mueve como una partícula equivalente de masa *M* se movería bajo la influencia de la fuerza externa resultante en el sistema.

Conservación de momento lineal para un sistema de partículas

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{Tot}}{dt} = \sum \vec{F}_{Ext}}$$

Si $\vec{F}_{Ext} = \vec{0}$ tenemos

$$\frac{d\vec{p}_{Tot}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = 0$$

de tal manera que

$$\vec{p}_{Tot} = \text{constante}$$

La segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\boxed{M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{Tot}}{dt} = \sum \vec{F}_{Ext}}$$

Si $\vec{F}_{Ext} = \vec{0}$ tenemos

$$\vec{a}_{CM} = \vec{0}$$

y

$$\vec{v}_{CM} = \text{constante}$$

Colisiones

Se dice que dos partículas chocan cuando están en contacto por un tiempo muy corto, produciendo, por tanto, una fuerza impulsiva una en la otra.

Se supone que estas fuerzas impulsivas son mucho mayores que cualquier otra fuerza externa presente.

Para describir el choque entre dos partículas se usa la ley de conservación del momento lineal.

Colisiones

Cuando dos partículas, 1 y 2, de masas m_1 y m_2 chocan, la fuerza impulsiva puede variar en el tiempo de manera muy complicada.

Tenemos

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad \Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}(t)\,dt$$

Colisiones

$$\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{12}(t)\,dt \qquad y \qquad \Delta\vec{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{21}(t)\,dt$$

De la tercera ley de Newton,

$$\vec{F}_{21}(t) = -\vec{F}_{12}(t)$$

así que $\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$

ó

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

Colisiones

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

Dado que el momento lineal del sistema es

$$\vec{p}_{sistema} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

concluimos que

$$\vec{p}_{sistema} = \text{constante}$$

Colisiones

$$\vec{p}_{sistema} = \text{constante}$$

El momento lineal de un sistema aislado, antes de la colisión, es igual al momento lineal del sistema justo después de la colisión.

El momento lineal se conserva en cualquier choque en el cual las fuerzas externas son despreciables.

Colisiones

En contraste, la energía cinética puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión.

El que la energía cinética se conserve o no se conserve, sirve para clasificar la colisiones como elásticas o como inelásticas, respectivamente.

Colisiones

$\Rightarrow$ Una colisión es elástica si la energía cinética total se conserva

$\Rightarrow$ Una colisión es inelástica si la energía cinética total NO se conserva.

El momento lineal se conserva en cualquier choque en el cual las fuerzas externas son despreciables.

Colisiones elásticas

Una colisión elástica entre dos objetos es una en la cual la energía cinética total (al igual que el momento lineal) es la misma antes y después de la colisión.

Colisiones elásticas

Una colisión elástica entre dos objetos es una en la cual la energía cinética total (al igual que el momento lineal) es la misma antes y después de la colisión.

Las colisiones estrictamente elásticas ocurren únicamente entre partículas atómicas y subatómicas.
En el mundo macroscópico las colisiones sólo pueden ser aproximadamente elásticas.

Colisiones inelásticas

Una colisión inelástica entre dos objetos es una en la cual la energía cinética total NO es la misma antes y después de la colisión, (aunque el momento lineal sí es constante).

Colisiones

En la mayoria de la colisiones,
la energía cinética no es la misma
antes y después del choque, porque
parte de ella se convierte en energía
interna, en energía potencial elástica
y en energía rotacional.

Colisiones inelásticas

Hay dos tipos de colisiones inelásticas.
Cuando los objetos que chocan se quedan pegados después del choque, se dice que la colisión es perfectamente inelástica.

Colisiones inelásticas

Hay dos tipos de colisiones inelásticas. Cuando los objetos que chocan no se quedan pegados, pero parte de la energía cinética se pierde, la colisión es simplemente inelástica.

Colisiones

En la mayoria de la colisiones, la energía cinética no es la misma antes y después del choque, porque parte de ella se convierte en energía interna, en energía potencial elástica y en energía rotacional.

Las colisiones elásticas y las perfectamente inelásticas son casos límites; la mayor parte de las colisiones están entre estos dos extremos.

Colisiones

El momento lineal se conserva en cualquier choque en el cual las fuerzas externas son despreciables.

En colisiones en dos y tres dimensiones, las componentes del momento lineal en cada una de las tres direcciones (x, y, z) se conservan independientemente.