Magnetismo

Dr. Rogerio

Introducción

- Campo vectorial alrededor de un imán
- Efectos familiares
  - Magnetos en el refri
  - Bocinas
  - Electroimanes ¿Cómo trabajan?
- ¿Cuál es la “carga” magnética?
  - ¿un punto con magnetismo?
  - Campo vectorial **B**
- Las observaciones muestran que una carga en movimiento genera un campo magnético
  - ¿en un magneto permanente donde esta la corriente?
- Otra corriente puesta en un **B** “sentirá” una fuerza
  - Manejaremos alambres conductores ¿afecta la forma del alambre?

Análisis Vectorial

$n\,D$	**Diferen-cial** $d\mathbf{s}$	**integrales** $\int_a^b \mathbf{X}\bullet d\mathbf{s}$ $\int_S \mathbf{X}\bullet d\mathbf{a}$	**derivadas** $\nabla\varphi$ gradiente *grad* $\nabla\bullet\mathbf{X}$ divergencia *div* $\nabla\times\mathbf{X}$ rotacional *rot*
1D	$d\mathbf{L}$ dx $d\mathbf{r}$	$\int_a^b \mathbf{E}\bullet d\mathbf{r} = V \Rightarrow \nabla V = \mathbf{E}$ $\oint_C \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow \nabla\times\mathbf{E} = 0$ $\oint_C \mathbf{X}\bullet d\mathbf{s} \neq 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \oint_C \mathbf{B}\bullet d\mathbf{s} = i' \Rightarrow \nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J}' \\ \oint_C \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\bullet d\mathbf{a} \Rightarrow \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \end{Bmatrix}$	$\nabla\bullet\mathbf{X} = V$ ∇V $\nabla\bullet\left(\nabla V\right) = \nabla^2 V$ *Laplaciano*
2D	$d\mathbf{a}$	$\oint_S \mathbf{E}\bullet d\mathbf{a} = \rho' \Rightarrow \nabla\bullet\mathbf{E} = \rho'$ $\oint_S \mathbf{B}\bullet d\mathbf{a} = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \nabla\bullet\mathbf{B} = 0 \\ \oint_C \mathbf{B}\bullet d\mathbf{s} = 0 \;\therefore \nabla\times\mathbf{B} = 0\,???? \end{Bmatrix}$	∇V $\oint_C \mathbf{E}\bullet d\mathbf{L} = \int_S \left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\bullet d\mathbf{a}$ *Stokes* vorticidad $\equiv$ densidad de la circulación
3D	dV	$x = \int_V y\,dV \qquad \mathbf{X} = \int_V \mathbf{Y}\,dV$	$\nabla\times\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ $\int_V \nabla\bullet\mathbf{E}\,dV = \oint_S \mathbf{E}\bullet d\mathbf{a}$ *Divergencia* (2D $\rightarrow$ 1D??)

Electrostática	Magnetostática (Electrodinámica)
Fuerza Ley de Coulomb	Fuerza Magnética (dos alambres largotes paralelos) $$F=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$$
Campo Eléctrico (quitamos una carga)	Campo Magnético (quitamos un alambre) $$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$$
	Ley de Biot-Sabart $$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids}{r^2}$$
Fuerza y campo eléctrico	Fuerza y campo magnético $$F=IB(l)(sen\theta)\Rightarrow \mathbf{F}=I(\mathbf{L}\times\mathbf{B})$$
	En términos de la velocidad $$\mathbf{F}=I(\mathbf{L}\times\mathbf{B})=\left(Nq/t\right)\left(\mathbf{v}t\times\mathbf{B}\right)=Nq\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$
Ley de Gauss	$$\Phi_B=\oint_S \mathbf{B}\bullet d\mathbf{a}=0$$
Voltaje	Ley de Ampere $$\oint_C \mathbf{B}\bullet d\mathbf{s}=\mu_0 i$$ es sobre un circuito

Eléctrico	Magnético
Fuerza Ley de Coulomb $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$	Fuerza Magnética (dos alambres largotes paralelos) $F=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}$
Campo Eléctrico (quitamos una carga) $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$	Campo Magnético (quitamos un alambre) $B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$
	Ley de Biot-Sabart $dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids}{r^2}$
Fuerza y campo eléctrico $F=qE$	Fuerza y campo magnético $F=IB(l)(sen\theta)$ $\mathbf{F}=I(\mathbf{L}\times\mathbf{B})$
	En términos de la velocidad $\mathbf{F}=I(\mathbf{L}\times\mathbf{B})=\left(Nq/t\right)\left(\mathbf{v}t\times\mathbf{B}\right)=Nq\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$
Ley de Gauss $\Phi_E=\oint_S \mathbf{E}\bullet d\mathbf{a}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$	$\Phi_B=\oint_S \mathbf{B}\bullet d\mathbf{a}=0$
Voltaje $-\int_i^f \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s}=V$ ó $\oint_C \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s}=0$ $\Delta=\oint \mathbf{V}\bullet d\mathbf{l}$ circulación ds y dl son los mismos circulacion es cero	Ley de Ampere $\oint_C \mathbf{B}\bullet d\mathbf{s}=\mu_0 i$ $\Delta_B=\mu_0 i$

Eléctrico Vectorial	Magnético Vectorial
Fuerza Ley de Coulomb $$\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$$	Fuerza Magnética (dos alambres largotes paralelos) $$F=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1I_2}{d}$$
Campo Eléctrico (quitamos una carga)	Campo Magnético (quitamos un alambre) $$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$$
$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\hat{\mathbf{r}}$$	Ley de Biot-Sabart $$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids}{r^2}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}$$
Fuerza y campo eléctrico	Fuerza y campo magnético $$\mathbf{F}=I(\mathbf{L}\times\mathbf{B})$$
$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}$$	En términos de la velocidad $$\mathbf{F}=Nq\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{J}\times\mathbf{B}$$
Ley de Gauss $$\Phi_E=\oint_S\mathbf{E}\bullet d\mathbf{a}=\frac{Q}{\varepsilon_0}\qquad\nabla\bullet\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$	$$\Phi_B=\oint_S\mathbf{B}\bullet d\mathbf{a}=0\qquad\nabla\bullet\mathbf{B}=0$$
Voltaje $$-\int_i^f\mathbf{E}\bullet d\mathbf{s}=V\quad\text{ó}\quad\mathbf{E}=-\nabla V$$ $$\Delta_E=0\quad\text{ó}\quad\nabla\times\mathbf{E}=0$$	Ley de Ampere $$\oint_C\mathbf{B}\bullet d\mathbf{s}=\mu_0 i$$ $$\Delta_B=\mu_0 i\quad\text{ó}\quad\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}$$

Díptico de Electricidad y Magnetismo

	Eléctrico	magnético
Dipolo	$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$	$\mathbf{m} = I\mathbf{A} = \mathbf{J} \times \mathbf{A}$
Campo	$\mathbf{E}(z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{p}}{z^3}$	$\mathbf{B}(z) = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{\mathbf{m}}{z^3}$
Torca	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$
Energía Potencial	$U = -\mathbf{p} \bullet \mathbf{E}$ $\quad U = q\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$	$U = -\mathbf{m} \bullet \mathbf{B}$
Voltaje	$V = \int_f^i \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s}$	¿?
Energía	$E = \dfrac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2$	$E = \dfrac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2$
Desplazamiento	$\mathbf{E} \to \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ con $\varepsilon = \chi\varepsilon_0$ $\mathbf{P} = n\mathbf{p}$	$\mathbf{B} \to \mathbf{H} = \dfrac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$ con $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ $\mathbf{M} = \dfrac{\mathbf{m}}{V}$ $\quad V$ es el volúmen

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \qquad \text{Fuerza de Lorentz}$$

$$E = \frac{1}{2}\varepsilon\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2$$

1er Divertimento Matemático

Potencial Vectorial Magnético

$$\nabla \bullet (\nabla V) \triangleq \nabla^2 V = \begin{cases} \rho' \\ 0 \end{cases} \qquad \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{X}) = 0 \qquad \nabla \times (\nabla V) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla (\nabla \bullet \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X} ????$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \quad \text{como} \quad \nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}' \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}' = \nabla (\nabla \bullet \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

especificando que $\nabla \bullet \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$

que proviene de escoger una norma adecuada

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla \varphi \qquad \therefore \qquad \nabla \bullet \mathbf{A} \to \nabla \bullet \mathbf{A} + \nabla^2 \varphi = 0$$

lo que lleva a:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}}{d} dV \quad \text{ó} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} dV$$

Eléctrico (Electrodinámica) Vectorial variable en el tiempo	Magnético (Magnetodinámica) Vectorial variable en el tiempo
Fuerza Ley de Coulomb	Fuerza Magnética (dos alambres largotes paralelos) $F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$
Campo Eléctrico (quitamos una carga)	Campo Magnético (quitamos un alambre) $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$
	Ley de Biot-Sabart $\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}$
Fuerza y campo eléctrico	Fuerza y campo magnético $\mathbf{F} = I(\mathbf{L}\times\mathbf{B})$
	En términos de la velocidad $\mathbf{F} = Nq\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) = \mathbf{J}\times\mathbf{B}$
Ley de Gauss $\Phi_E = \oint \mathbf{E}\bullet d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\bullet\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	Ley de Faraday $\Im = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\bullet d\mathbf{a}$ $\oint_C \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\bullet d\mathbf{a}$ ó $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
Voltaje (Ley de Faraday) $\Delta_E \neq 0$ ó $\nabla\times\mathbf{E}\neq 0$ $\oint \mathbf{E}\bullet d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B}\bullet d\mathbf{a}$ ó $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	Ley de Ampere-Maxwell $\oint_C \mathbf{B}\bullet d\mathbf{s} = \mu_0 i$ $\oint_C \mathbf{B}\bullet d\mathbf{s} = \mu_0 i + \varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{E}\bullet d\mathbf{a}$ ó $\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)$

Electromagnetismo

$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$ Fuerza de Lorentz

$E = \frac{1}{2}\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2$ Energía del Campo Electromagnético

$$\oint_C \mathbf{X} \bullet d\mathbf{s} \neq 0$$

$$\oint_C \mathbf{B} \bullet d\mathbf{s} = \mu_0 i + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{E} \bullet d\mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Im = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{A}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \bullet d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \bullet d\mathbf{A} \quad \text{ó} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

2do Divertimento Matemático
Potencial Vectorial Magnetodinámico

como $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$ y $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{X}) = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{X}) - \nabla^2 \mathbf{X}$

por otro lado $\nabla \bullet \mathbf{B} = 0$ se puede escribir $\nabla \bullet (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{y} \quad \text{como} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \quad \therefore \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

haciendo el campo conservativo

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\text{como} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \nabla(\nabla \bullet \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$$\text{rearreglando} \quad -\nabla^2 \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0 \mathbf{J} - \nabla \left(\nabla \bullet \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

escogiendo la norma tal que $\nabla \bullet \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}}$$

2do Divertimento Matemático
Potencial Vectorial Magnetodinámico

recordando que $\nabla \bullet \mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ y del hecho ahora de $\nabla \bullet \left(-\nabla \varphi - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

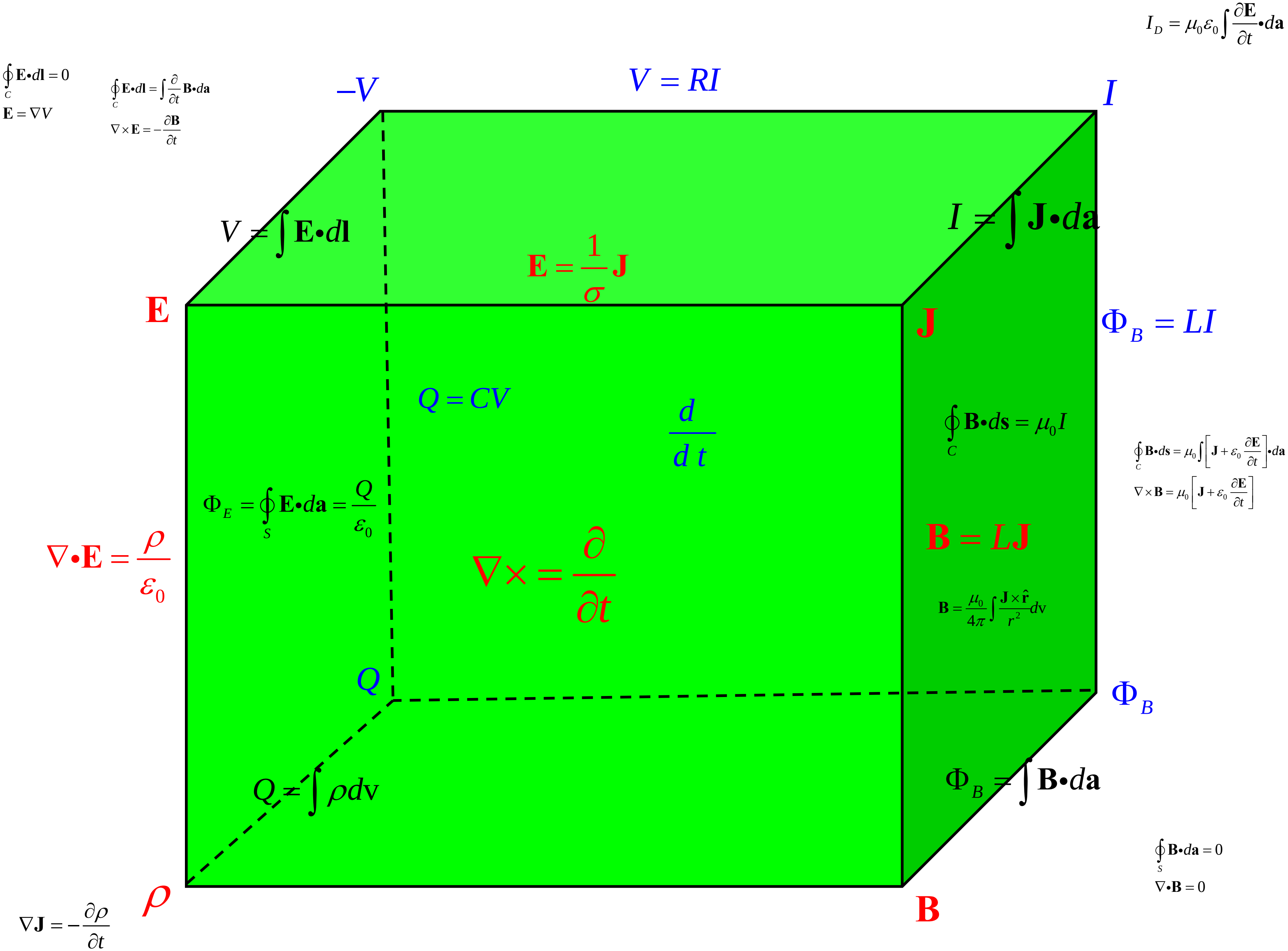
se obtiene

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \bullet \mathbf{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

y con la elección de norma

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}}$ que queda completo con $\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}}$


$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0$
$\mathbf{E} = \nabla V$
$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$
$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$I_D = \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot d\mathbf{a}$
$-V$
$V = RI$
I
$V = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$
$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{J}$
$I = \int \mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$
$\mathbf{E}$
$\mathbf{J}$
$\Phi_B = LI$
$Q = CV$
$\frac{d}{d\,t}$
$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$
$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int \left[\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]\cdot d\mathbf{a}$
$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\left[\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]$
$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\nabla\times = \frac{\partial}{\partial t}$
$\mathbf{B} = L\mathbf{J}$
$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{J}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}dv$
Q
Φ_B
$\Phi_B = \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a}$
$Q = \int \rho\, dv$
$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{a} = 0$
$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$
ρ
$\mathbf{B}$
$\nabla\mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$