Ecuaciones Diferenciales Segundo Orden homogéneas

Dr. Rogerio

¿La exponencial sera una solución?

Ecuacion Diferencial de Segundo Orden

$$ay''+by'+cy=0$$

$$a\neq 0$$

segundo dos soluciones distintas

$y_1(x), y_2(x)$

LA solucion es

una combinacion lineal de ellas

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

Proponga solucion

$y(x)=\exp(s\,x)$

solucion?

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix} y'(x)=s\exp\left(sx\right) \\ y''\left(x\right)=s^2\exp\left(sx\right)\end{matrix}\right\}$$

sustituyendo

$$as^2\exp\left(sx\right)+bs\exp\left(sx\right)+c\exp(s\,x)=0$$

simplificando

$$\left(as^2+bs+c\right)\underbrace{\exp(s\,x)}_{\text{nunca cero}}=0 \qquad \therefore \quad \underbrace{\boxed{as^2+bs+c=0}}_{\textit{ECUACION}\ \text{CARACTERISTICA}}$$

$$ay''+by'+cy=0$$

$$\underbrace{\boxed{as^2+bs+c=0}}_{ECUACION\ \text{CARACTERISTICA}}$$

dos soluciones

$$s_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Hay tres posibilidades dependiendo del discriminante

i) $b^2-4ac=0 \quad \Rightarrow s_1$ y s_2 son iguales ....pero ...pero....necesitamos dos!!!!

ii) $b^2-4ac>0 \quad \Rightarrow s_1 \neq s_2$ y reales

iii) $b^2-4ac<0 \quad \Rightarrow s_1 \neq s_2$ y complejas!!!!

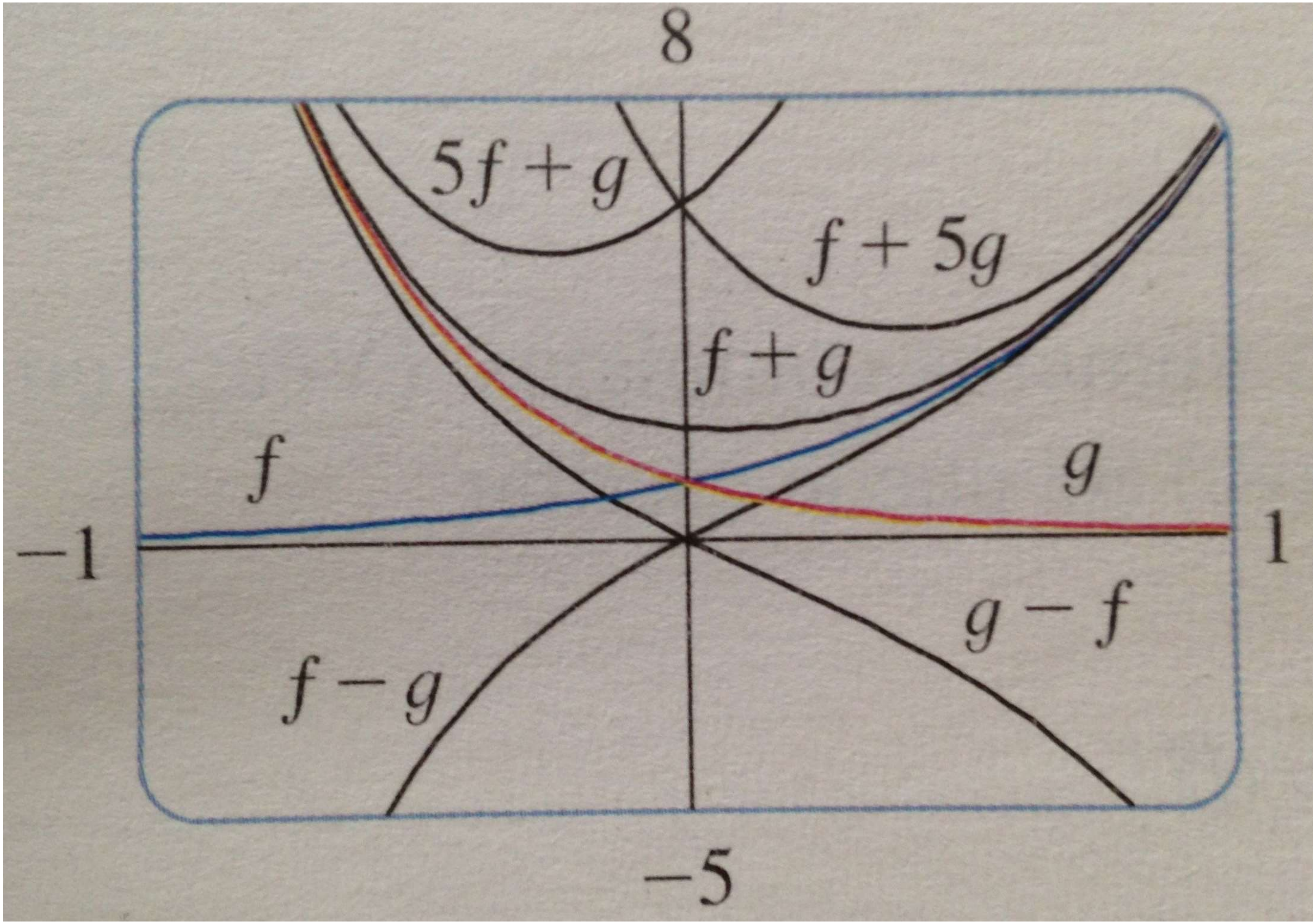
$\Rightarrow s_1 \neq s_2$ y reales

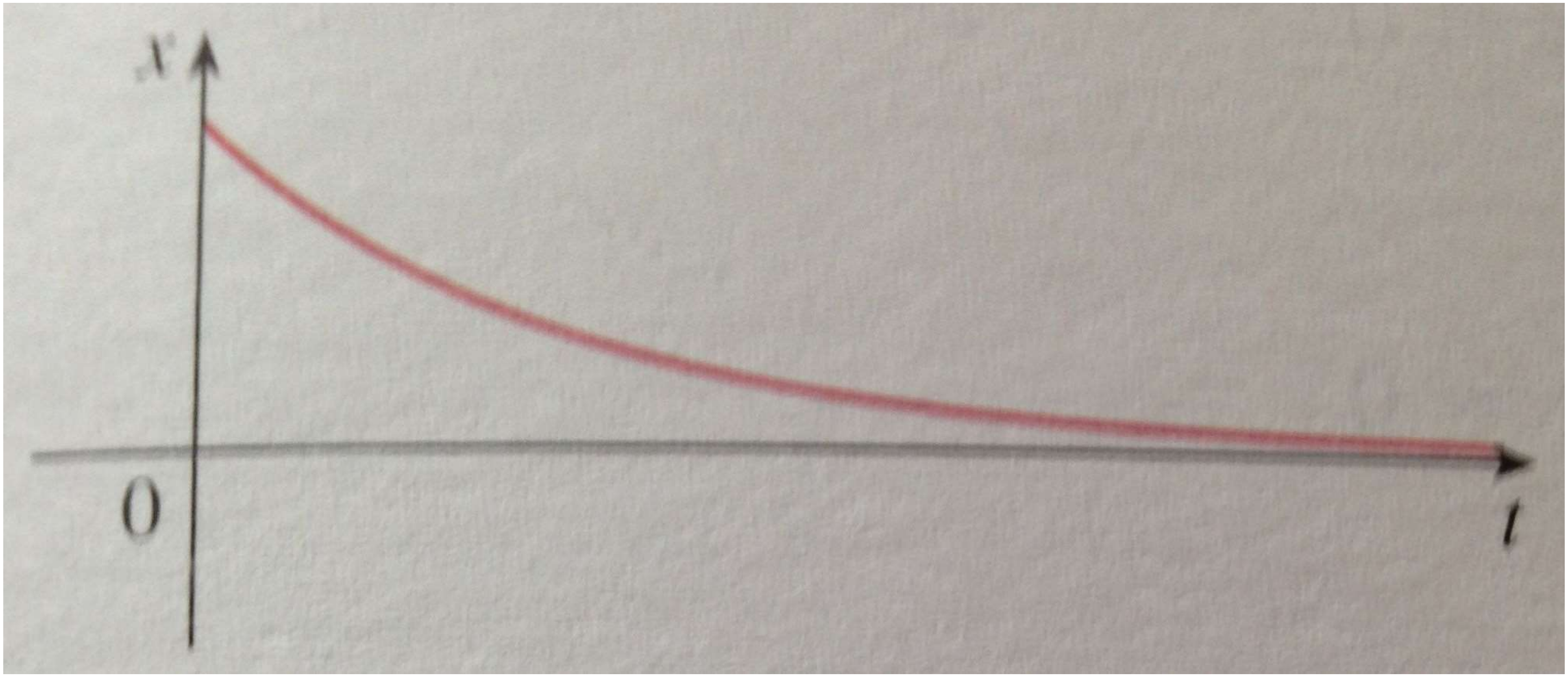
las soluciones son:

$y_1(x)=\exp(s_1x)$

$y_2(x)=\exp(s_2x)$

$$\therefore \boxed{y(x)=c_1\exp(s_1x)+c_2\exp(s_2x)}$$


8
5f + g
f + 5g
f + g
f
g
−1
1
g − f
f − g
−5



Sobreamortiguado

$$\text{iii)}\, b^2 - 4ac < 0 \qquad s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \quad -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(-1)\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm j\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \alpha \pm j\omega$$

$$\text{con } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{y} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$\therefore y(x) = c_1 \exp(s_1 x) + c_2 \exp(s_2 x) = c_1 \exp((\alpha + j\omega)x) + c_2 \exp((\alpha - j\omega)x)$$

recuerde

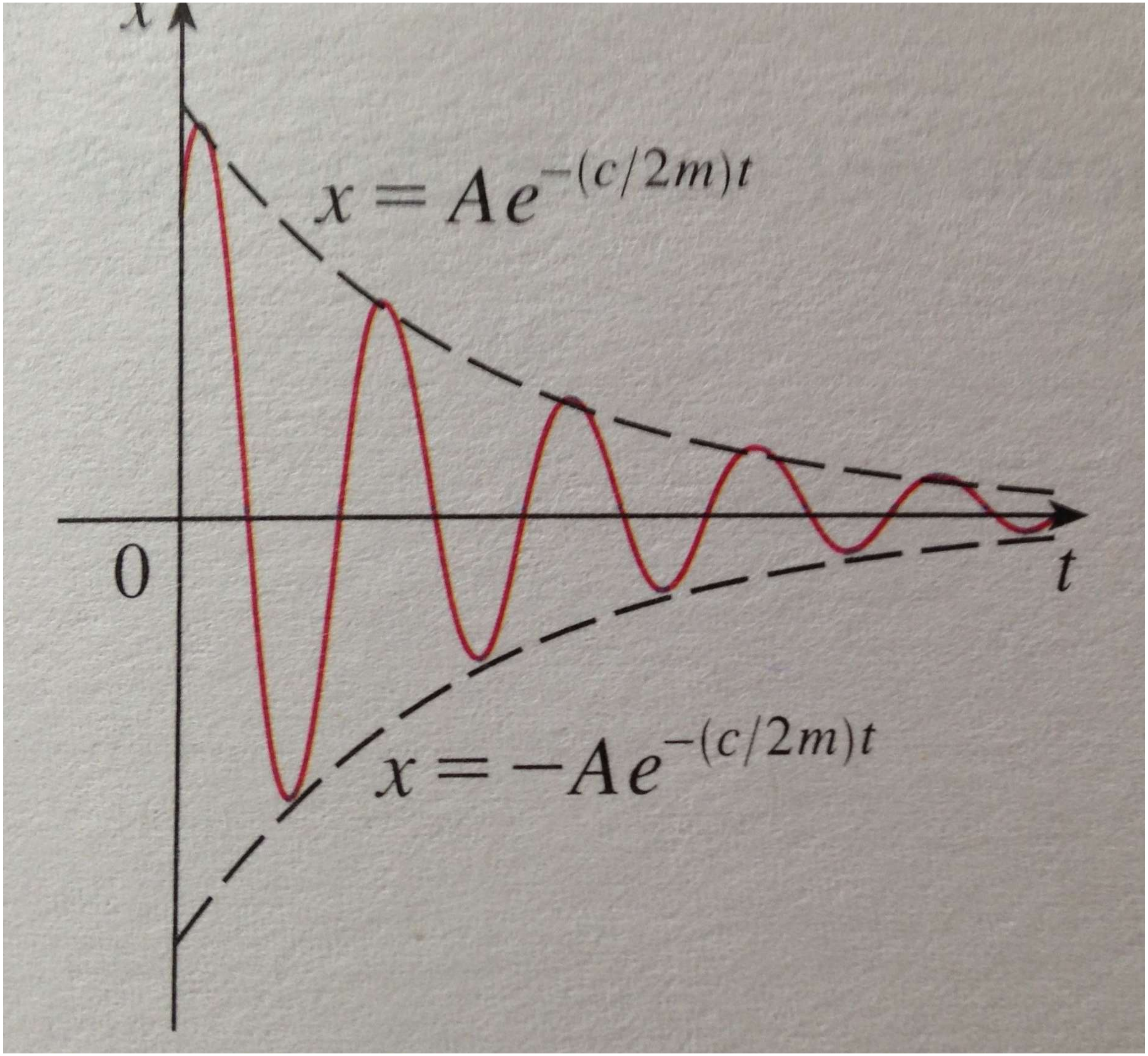
$$\exp((\alpha + j\omega)x) = \exp(\alpha x)\exp(j\omega x)$$

$$\therefore y(x) = c_1 \exp(\alpha x)\exp(j\omega x) + c_2 \exp(\alpha x)\exp(-j\omega x) =$$

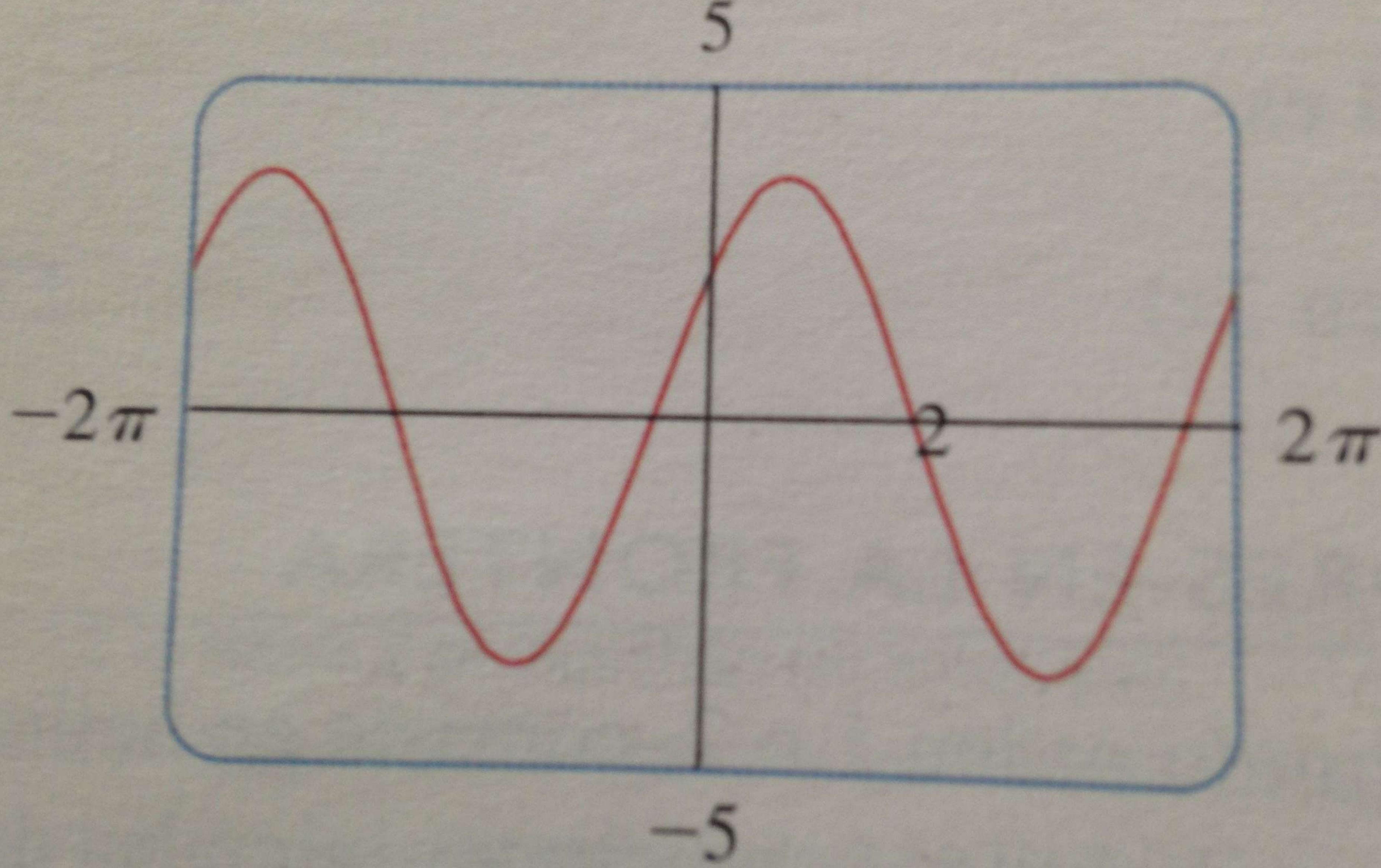
$$= \exp(\alpha x)\left[c_1(\cos\omega x + j\sin\omega x) + c_2(\cos\omega x - j\sin\omega x)\right] =$$

$$= \exp(\alpha x)\left[(c_1 + c_2)\cos\omega x + j(c_1 - c_2)\sin\omega x\right]$$

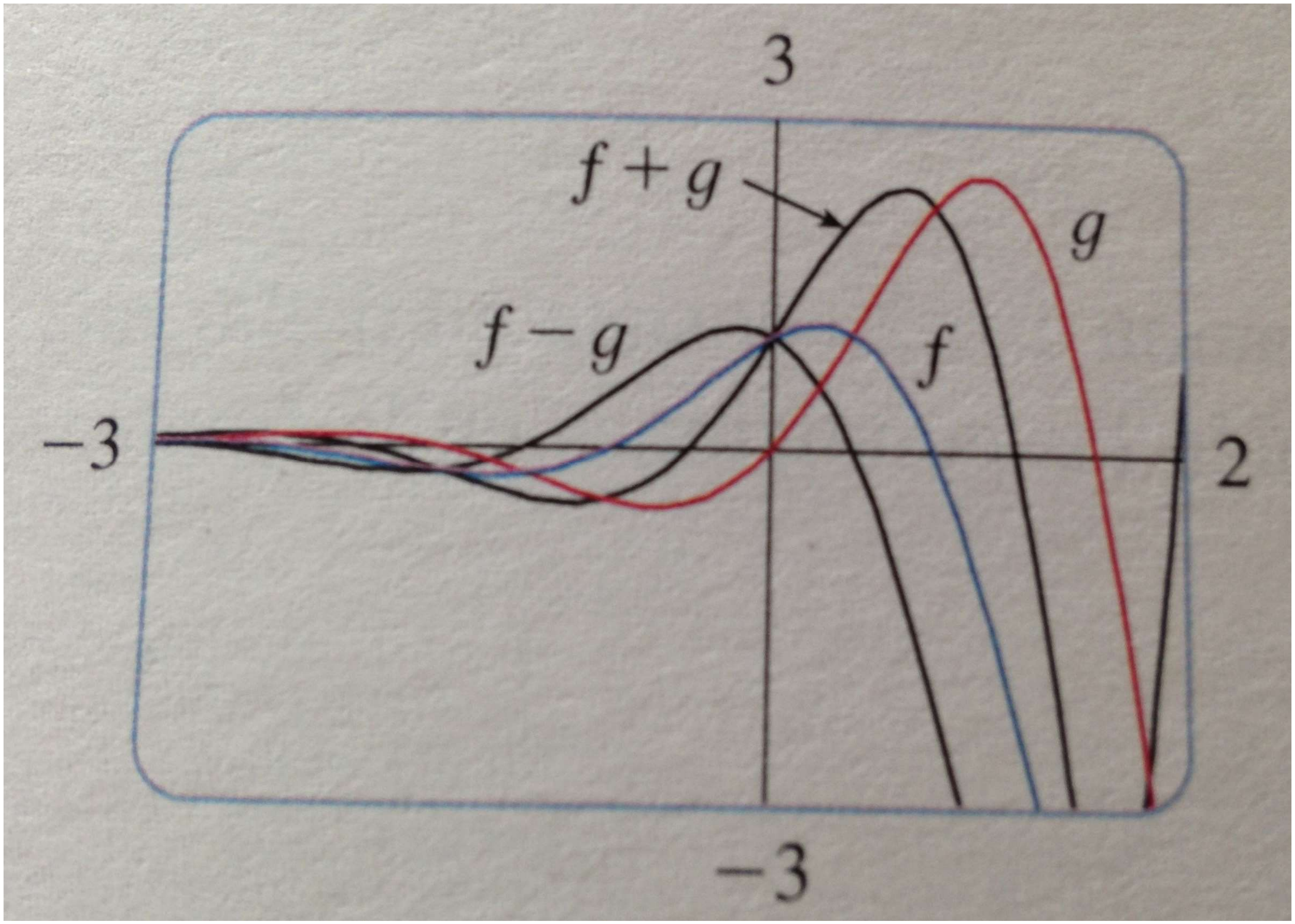
$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \exp(\alpha x)\left[A\cos\omega x + B\sin\omega x\right]}$$



Subamortiguado



5
−2π
2
2π
−5


3
f + g
g
f − g
f
−3
2
−3

Para el caso cuando $s_1 = s_2$ reales

las soluciones son:

$$y_1(x) = \exp(sx)$$

$$y_2(x) = \exp(sx)$$

Si las funciones potencia son linealmente independientes
entonces
podemos pensar en que las dos soluciones iguales
se pueden volver independientes por suponer

que una solucion es multiplicada por

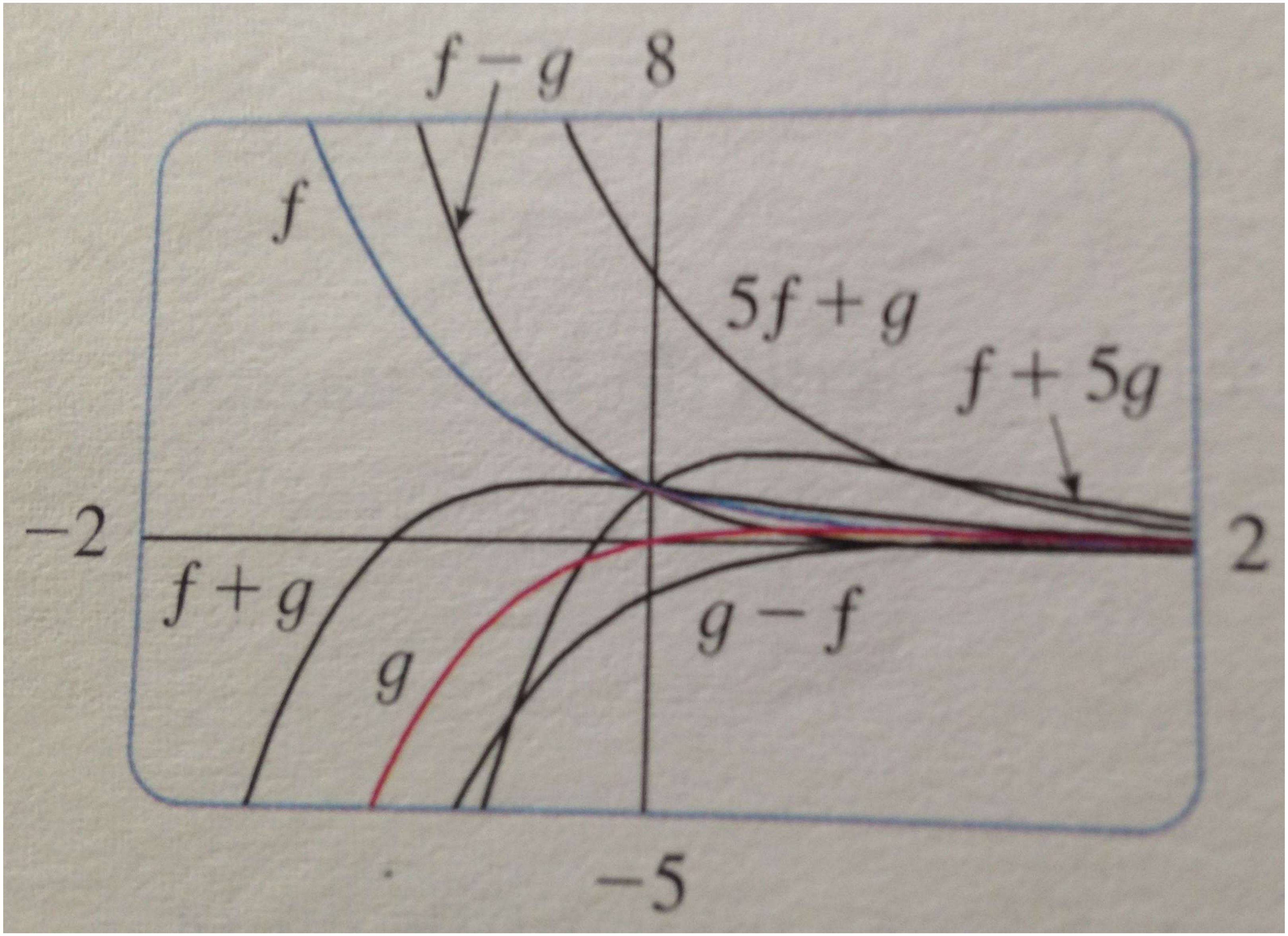
$1 = x^0$ es decir $y_1(x) = 1\exp(sx)$

y por tanto podemos multiplicar la otra por

x^1 es decir $y_2(x) = x\exp(sx)$

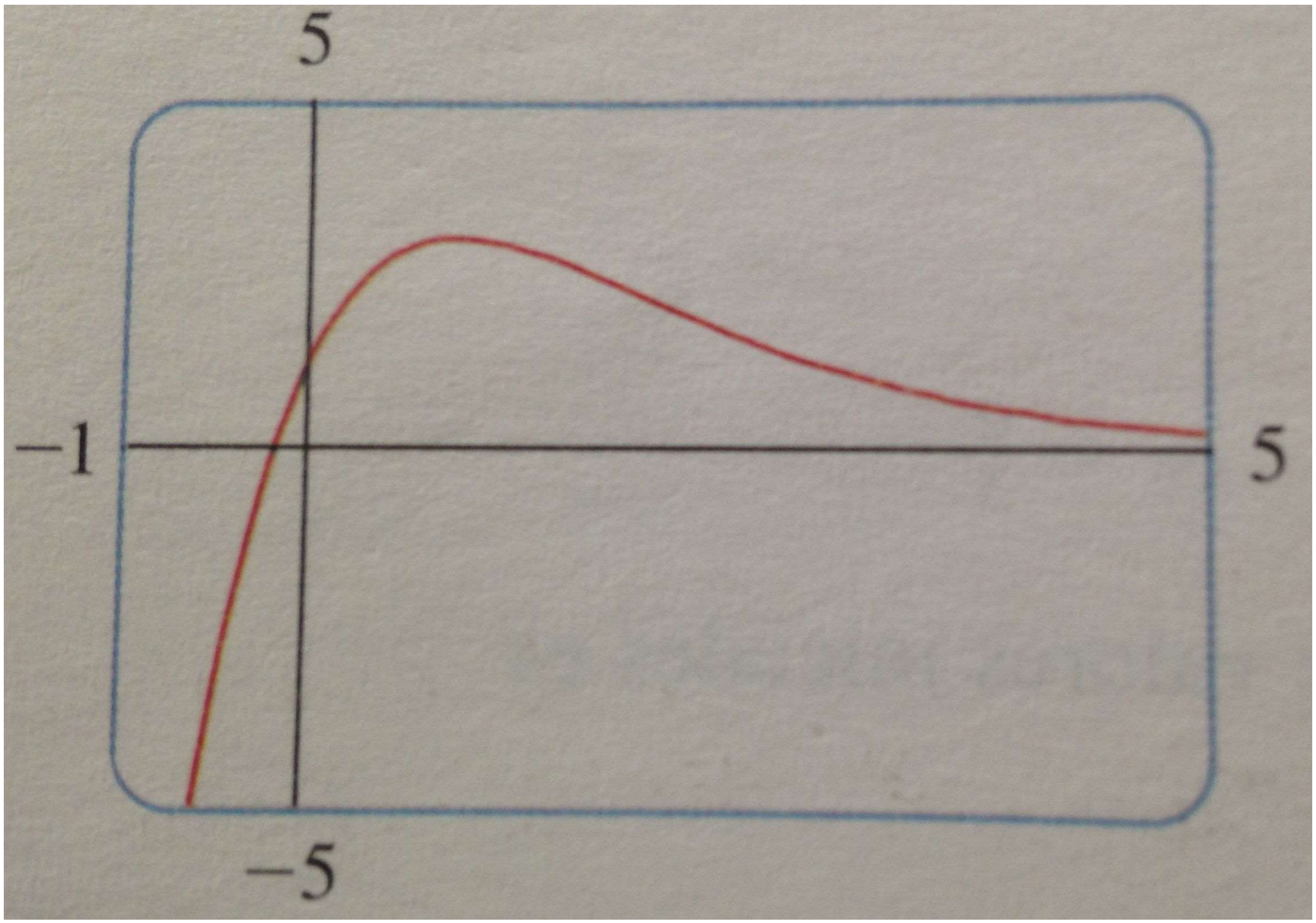
quedando

$$y(x) = C_1 \exp(\alpha x) + C_2 x \exp(\alpha x)$$

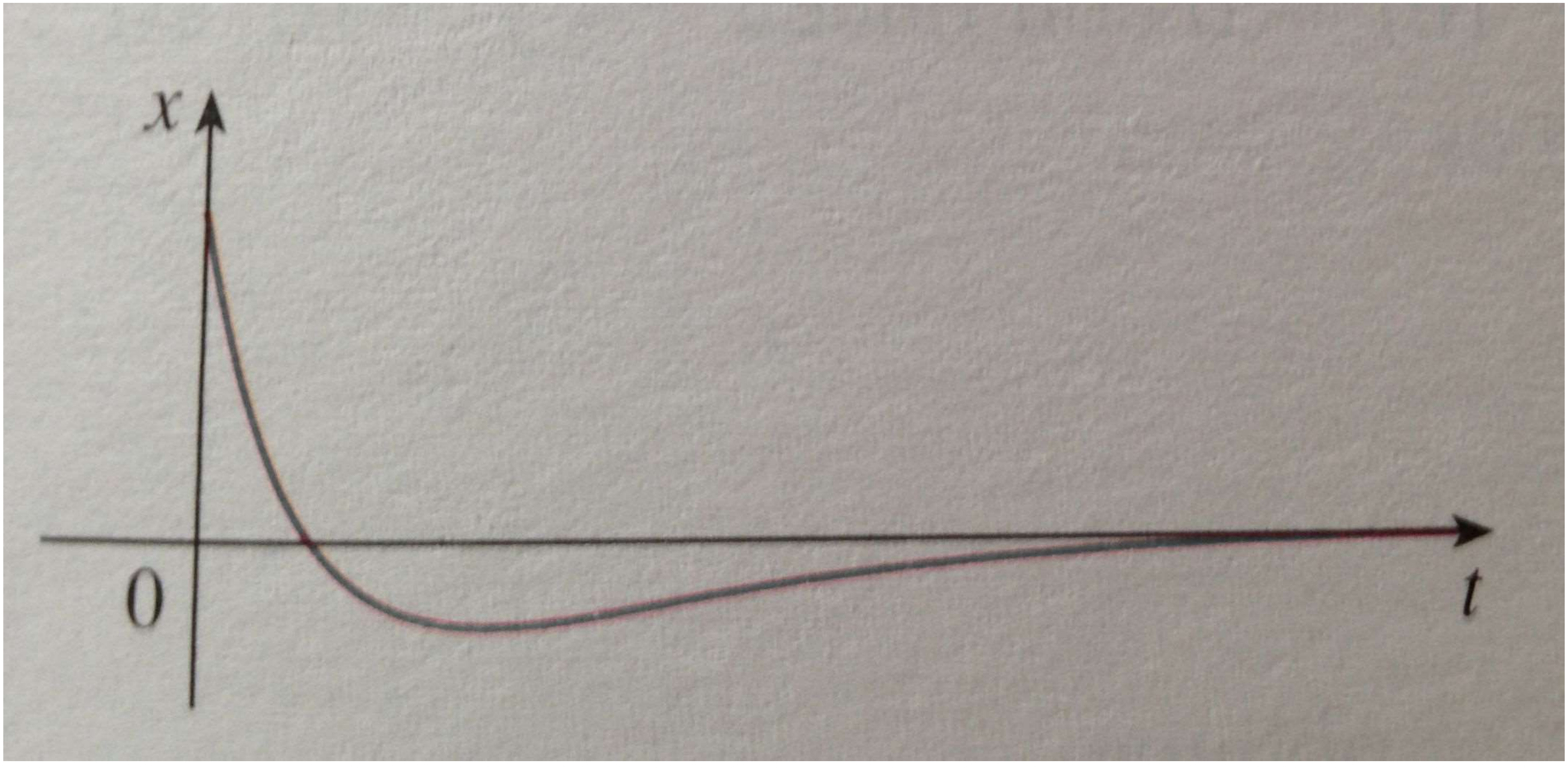


$f-g$
8
f
$5f+g$
$f+5g$
-2
2
$f+g$
$g-f$
g
-5

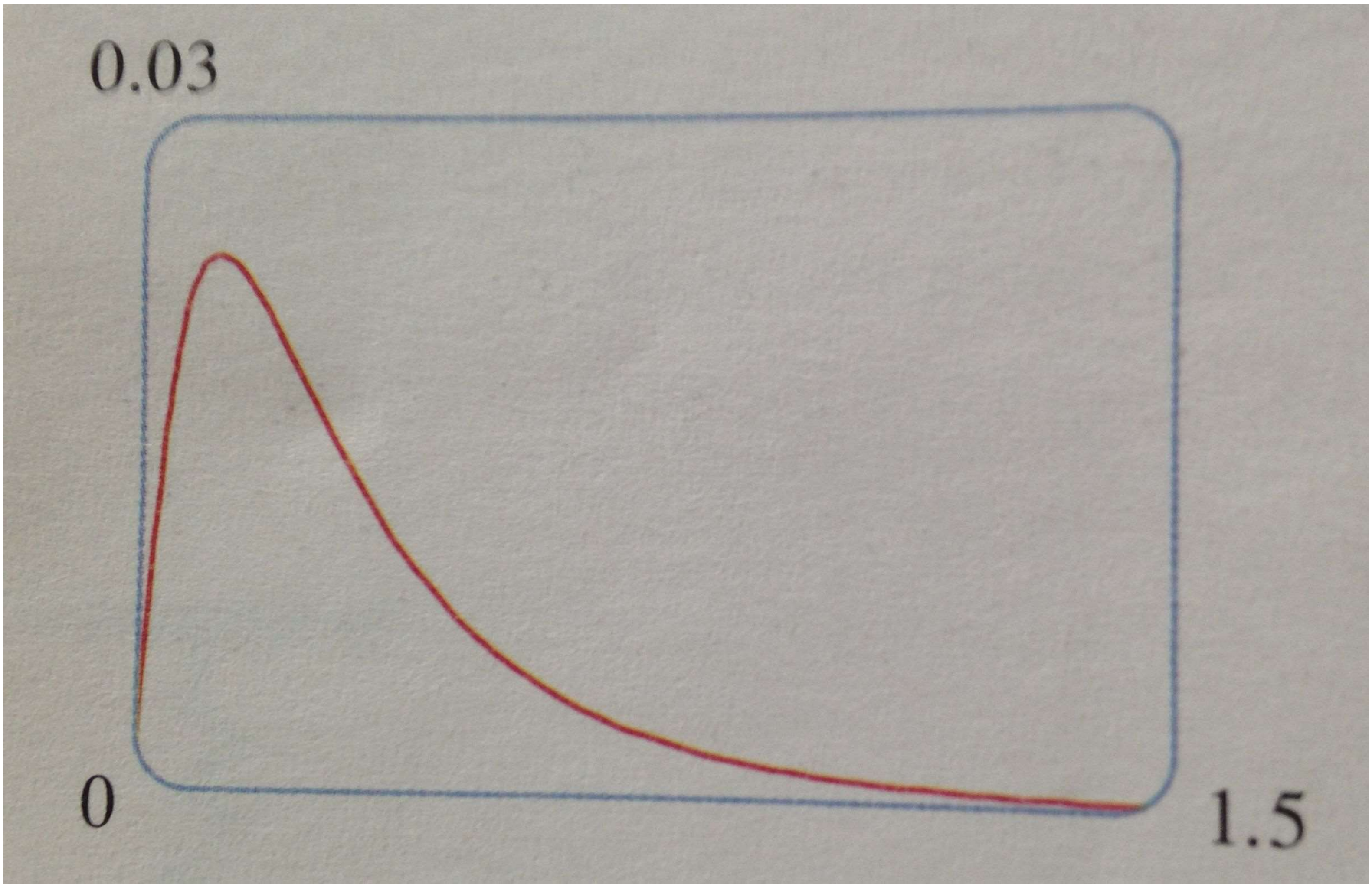
Criticamente amortiguado



Criticamente amortiguado



Criticamente amortiguado



Discriminante $\sqrt{b^2-4ac}$	**Ecuación Característica** $as^2+bs+c=0$	**Solución**	**Caso** $m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+kx=0$ $L\ddot{I}+R\dot{I}+\frac{1}{C}I=0$	**Nombre**
$b^2-4ac>0$ $b^2>4ac$	Dos soluciones reales y distintas $s_1 \neq s_2$	$y(x)=$ $C_1\exp(s_1x)+$ $C_2\exp(s_2x)$	$s_{1,2}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4mk}}{2m}$	Sobre amortiguado
$b^2-4ac<0$ $4ac>b^2$ $-\frac{b}{2a}+j\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$	Dos soluciones complejas conjugadas $s_1=\alpha+j\omega$ $s_2=\alpha-j\omega$	$y(x)=$ $C_1\exp(\alpha x)\cos(\omega x)+$ $C_2\exp(\alpha x)\sin(\omega x)$	$s_1=\alpha+j\omega$ $s_2=\alpha-j\omega$ $\alpha=-\frac{\gamma}{2m}$ $\omega=\sqrt{\frac{4mk-\gamma^2}{4m^2}}$	Sub amortiguado
$b^2-4ac=0$ $b^2=4ac$	Dos soluciones reales e iguales $s_1=s_2=-\frac{\gamma}{2m}$ $=\alpha$	$y(x)=$ $C_1\exp(\alpha x)+$ $C_2x\exp(\alpha x)$	$\alpha=-\frac{\gamma}{2m}$	Criticamente amortiguado