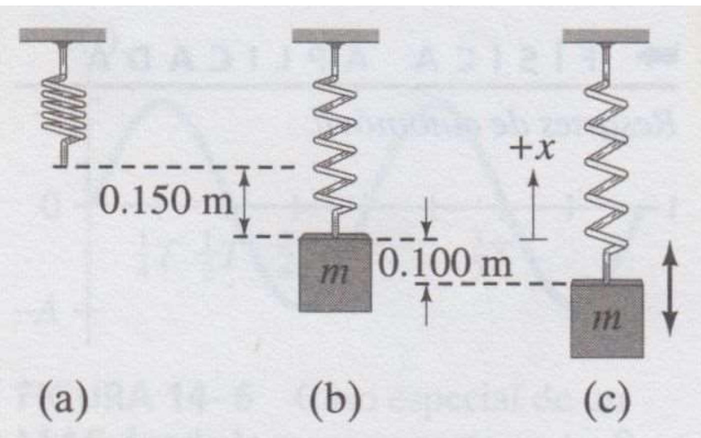
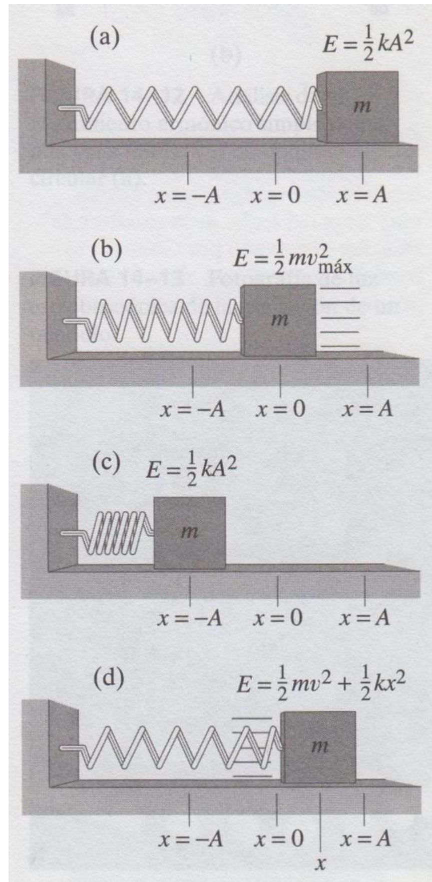
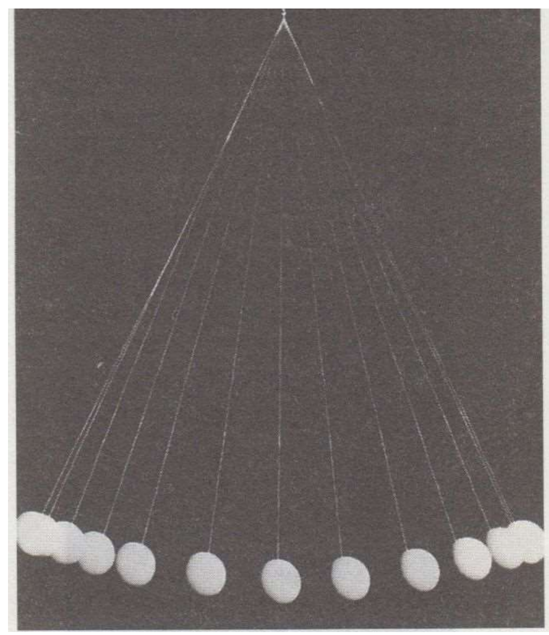
# Ecuaciones Diferenciales

Dr. Rogerio

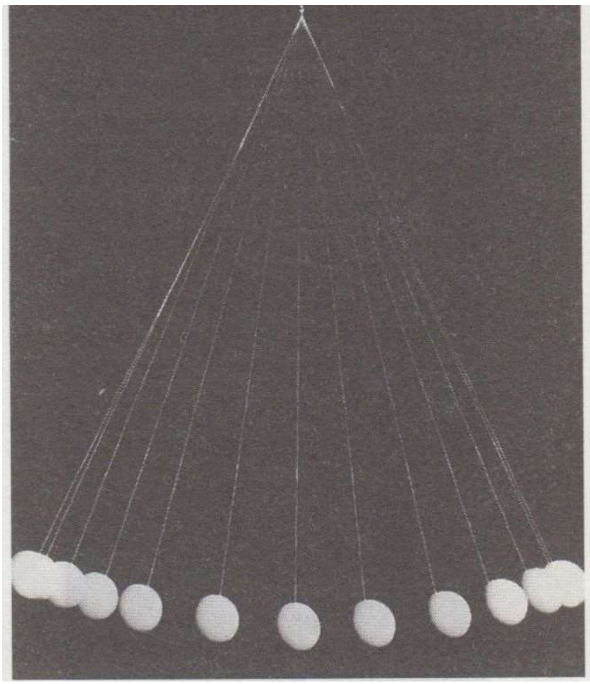
# Oscilador armónico simple



# Péndulo simple



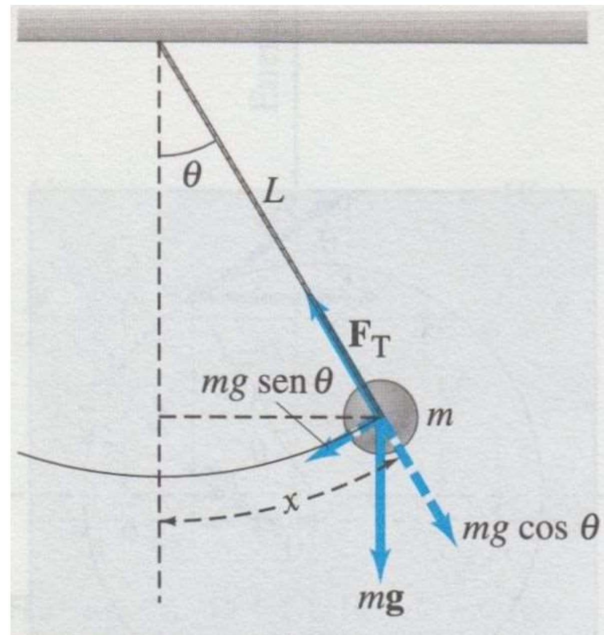
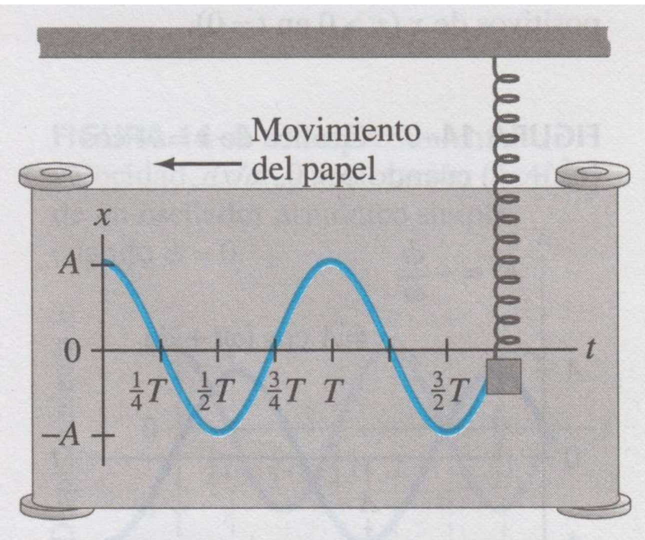



FIGURA 14–14 Péndulo simple.

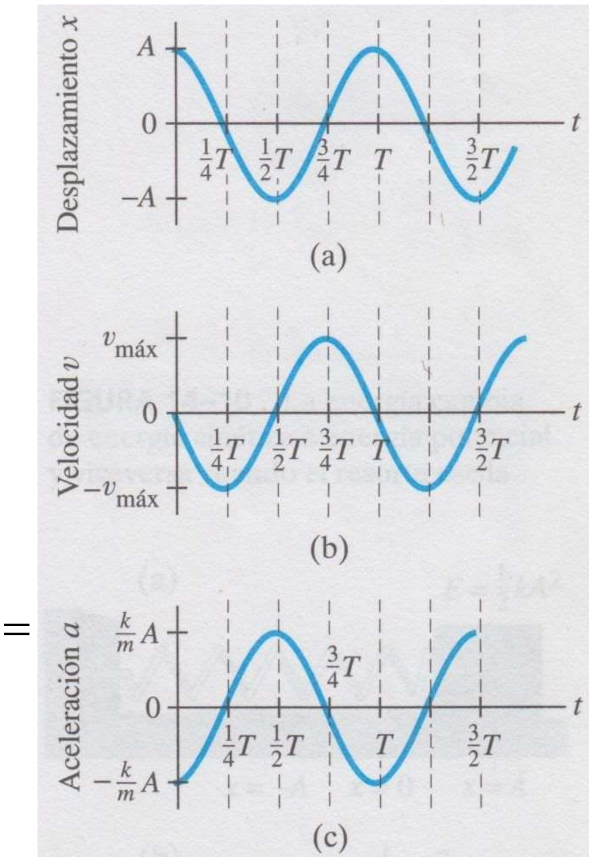
# Movimiento senoidal,



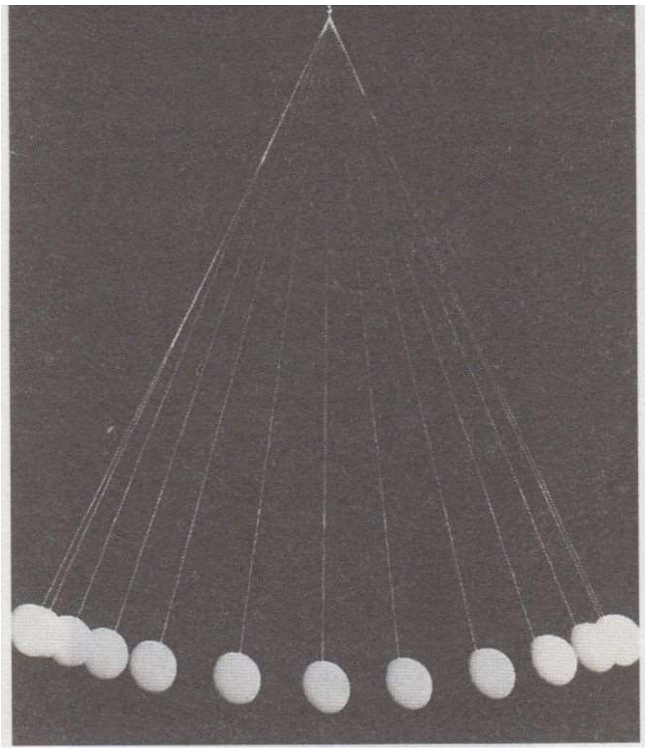

$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

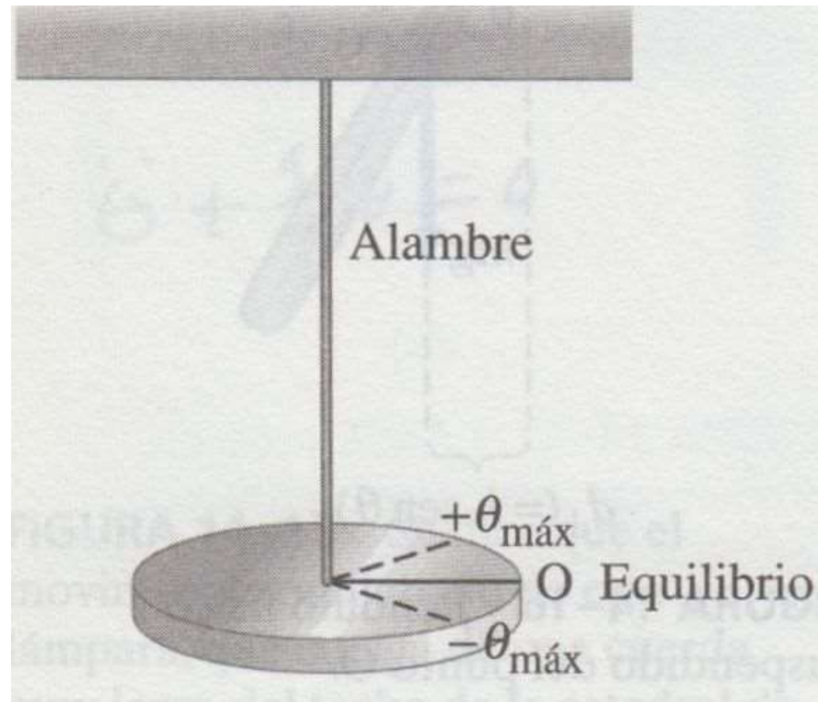
$$A\cos(\omega t + \phi) = \cos\phi \cos\omega\,\mathrm{t} - \sin\phi \sin\omega t =$$
$$a\cos\omega\,\mathrm{t} + b\sin\omega t$$

$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$v(\mathrm{t}) = -\omega A\sin(\omega\,\mathrm{t} + \phi)$$
$$\mathrm{a(t)} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

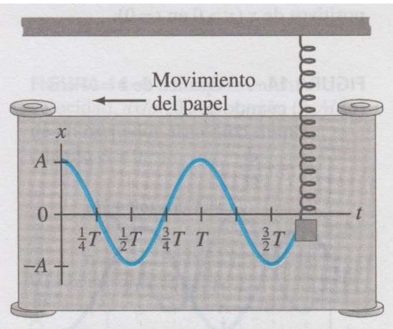


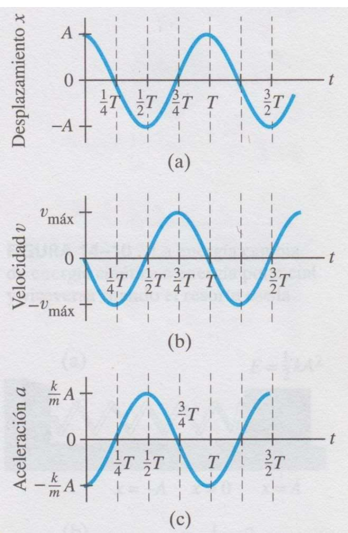
# Cuando la fuerza de restitucion es lineal





# Condiciones iniciales




$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$A\cos(\omega t + \phi) = \cos\phi\cos\omega\,\mathrm{t} - \sin\phi\sin\omega t =$$
$$a\cos\omega\,\mathrm{t} + b\sin\omega t$$

$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$v(\mathrm{t}) = -\omega A\sin(\omega\,\mathrm{t} + \phi)$$
$$\mathrm{a}(\mathrm{t}) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

para $t = 0$ esta en A e implica $v = 0$

*como*

$$v(\mathrm{t}) = -\omega A\sin(\omega\,\mathrm{t} + \phi) = 0 \quad \text{en } t = 0$$

*solo* si $\phi = 0$

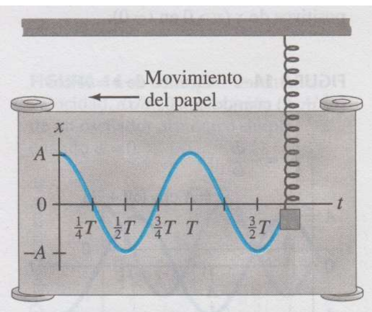
$$\therefore z(t) = A\cos(\omega t)$$

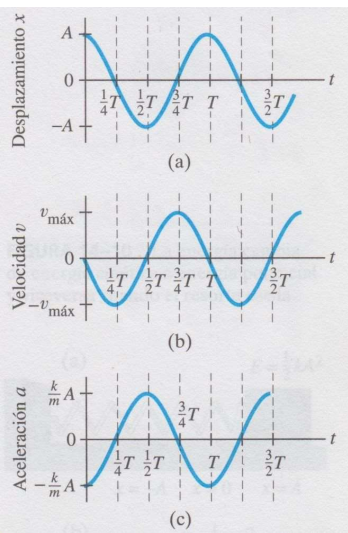
*ademas*

$$z(0) = \mathrm{A}$$

correcto

# Condiciones iniciales




$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$v(\mathrm{t}) = -\omega A\sin(\omega\,\mathrm{t} + \phi)$$
$$\mathrm{a(t)} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

para $t = 0$ esta en $0$ y se golpea dandole $v \neq 0$

$z(0) = A\cos(\omega t + \phi)$

$= A\cos(\phi)$

*solo* si $\phi = \pm\dfrac{\pi}{2}$

que depende si $v(0) = v_0$ es positiva o negativa

*cuidado* con el sistema de referencia!!!!

suponga que es positiva la velocidad hacia arriba

$v(0) = -\omega A\sin(\phi) > 0$ solo si $\phi = -\dfrac{\pi}{2}$

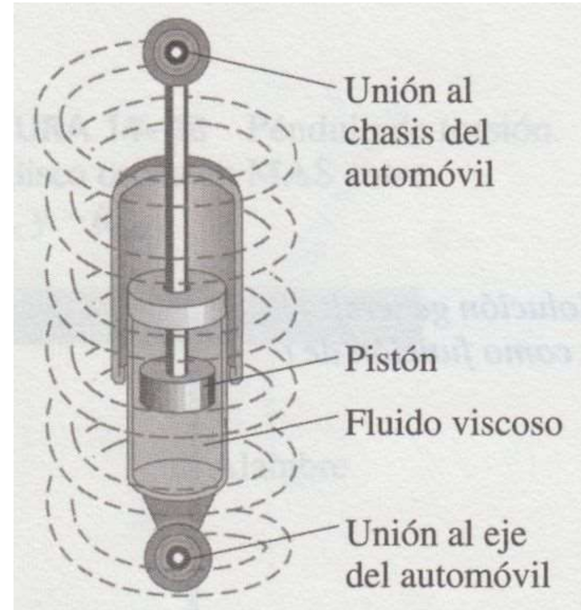
$\therefore z(t) = A\cos(\omega t - \pi/2) = \mathrm{A}\sin(\omega\,\mathrm{t})$

*asi*

$v(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\,\omega\cos(\omega\,\mathrm{t})$

$v(0) = v_0 > 0$ correcto

# Ejemplo: Amortiguadores de un carro



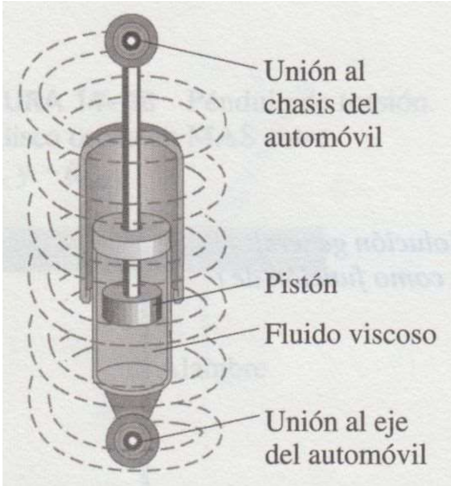

Cuando una familia de 4 personas con una masa total de 200 kg se sube a su automóvil de 1 200 kg, los resortes se comprimen 3.0 cm ¿Cuál es la constante de los resortes suponiendo que actúan como un solo resorte?

$$k = \frac{F}{x} = \frac{200X9.8}{3.0E-2} = 6.5E4 = 65000$$

¿Cuánto mas bajara el automóvil si se carga con 300 kg?

$$k = \frac{F}{x} = \frac{300X9.8}{6.5E4} = 4.5E-2 = 4.5cm$$

# Ejemplo: Amortiguadores de un carro




¿Cuál es la frecuencia de vibración del automóvil después De golpear un tope? Suponga que los amortiguadores del carro están en mal estado por lo que el carro realmente oscila hacia arriba y hacia abajo.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{6.5E4}{1400}} \approx 6.814\left[rad/\mathrm{s}\right]$$

$$notese$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = 1.084\left[1/s = Hz\right]$$

$$ademas$$

$$T = 1/f = 0.92\left[s\right]$$

# Ejemplo: cono de una bocina

El cono de una bocina está tocando un Do central del piano.

La amplitud en el centro del cono es de 1.5E-4 m

¿Cuál es la velocidad máxima y la aceleración máxima?

# Ejemplo: cono de una bocina

C central del piano es de 262 Hz

El cono se mueve como un oscilador armónico

La amplitude máxima ocurre en t=0

$$x = A\cos(\omega \mathrm{t})$$

$$\mathrm{t} = 0, x_o = 1.5X10^{-4}$$

$$como \quad \omega = 2\pi f = 6.28X262 = 1650$$

$$x = 1.5X10^{-4}\cos(1650\,\mathrm{t})$$

$$\mathrm{como}$$

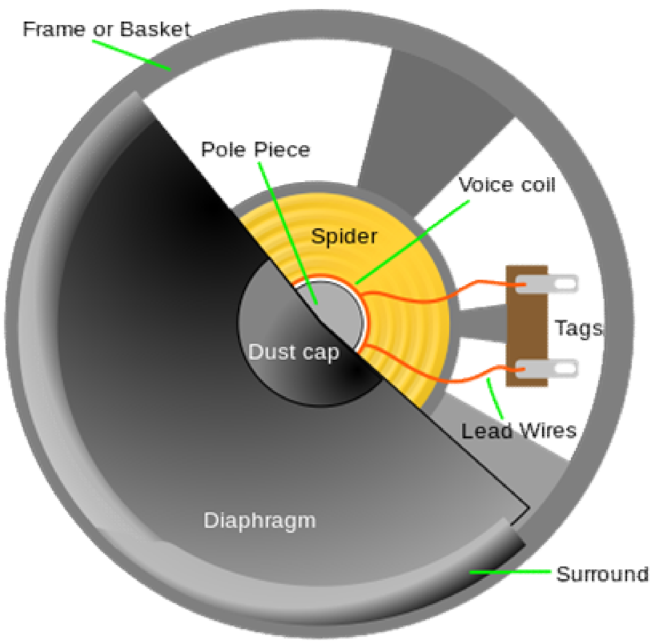
$$v = -\omega A\sin(\omega \mathrm{t})$$

$$el \text{ maximo ocurre en } 0.25\mathrm{m/s}$$

$$\text{y la aceleracion es maxima cuando}$$

$$a = -\omega^2 A = 410m/s^2$$

$$que \text{ es mas que } 40\mathrm{g}$$



# Ejemplo: cono de una bocina

C central del piano es de 262 Hz

¿Cuál es la posición del cono en 1ms?

$$x = A\cos(\omega\,\mathrm{t})$$

$$\mathrm{t} = 0, x_o = 1.5X10^{-4}$$

$$como \quad \omega = 2\pi f = 6.28X262 = 1650$$

$$x = 1.5X10^{-4}\cos(1650\,\mathrm{t})$$

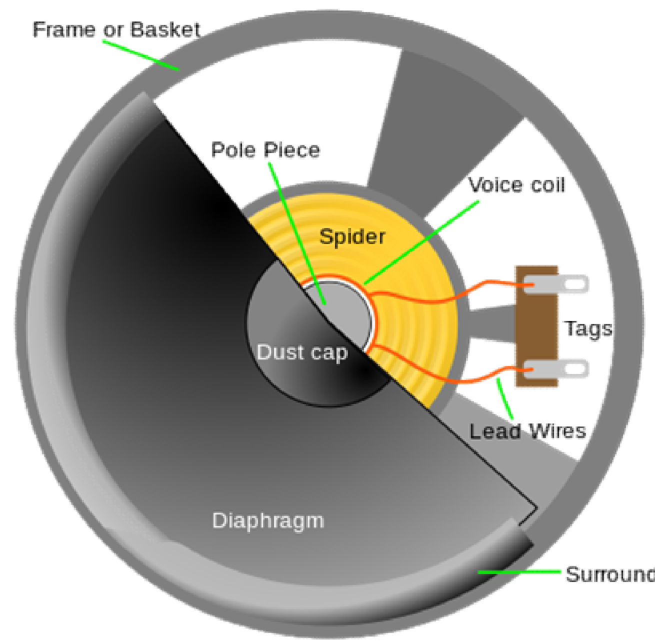
$$en \ \mathrm{t{=}1ms}$$

$$x = 1.5X10^{-4}\cos(1650X10^{-3}) = -1.2X10^{-5}\,m$$

¿Es mucho o poco?

$$T = 1/f = 0.0038s = 3.8ms$$

*al* milisegundo esta a menos de 1/4 de su carrera total



# Circuito LC

$$\frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt}$$

*pero*

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$ porque disminuye la corriente

$\therefore$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

ecuación diferencial análoga

al oscilador harmónico

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

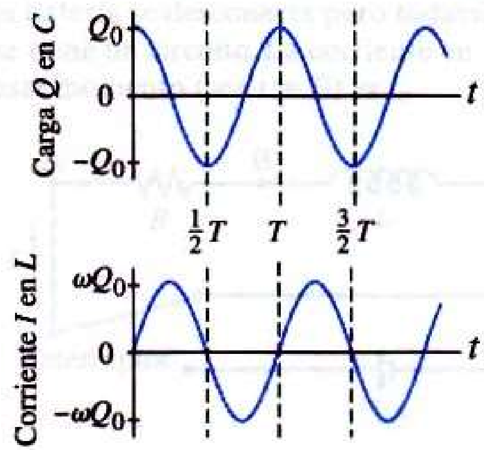
*solución*

$$Q = Q_0\cos(\omega t + \varphi)$$

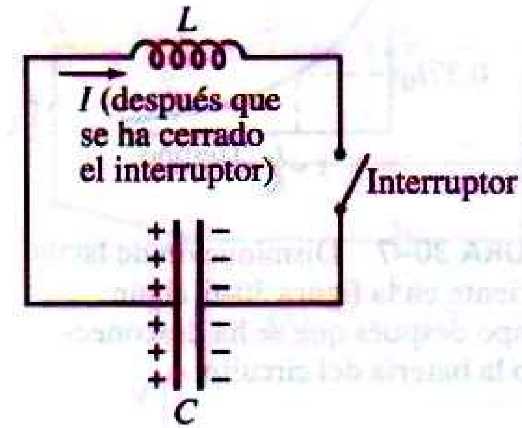
*con*

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Carga $Q$ y corriente $I$ en un circuito $LC$. El periodo es $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$.




GRAFICAAAA????

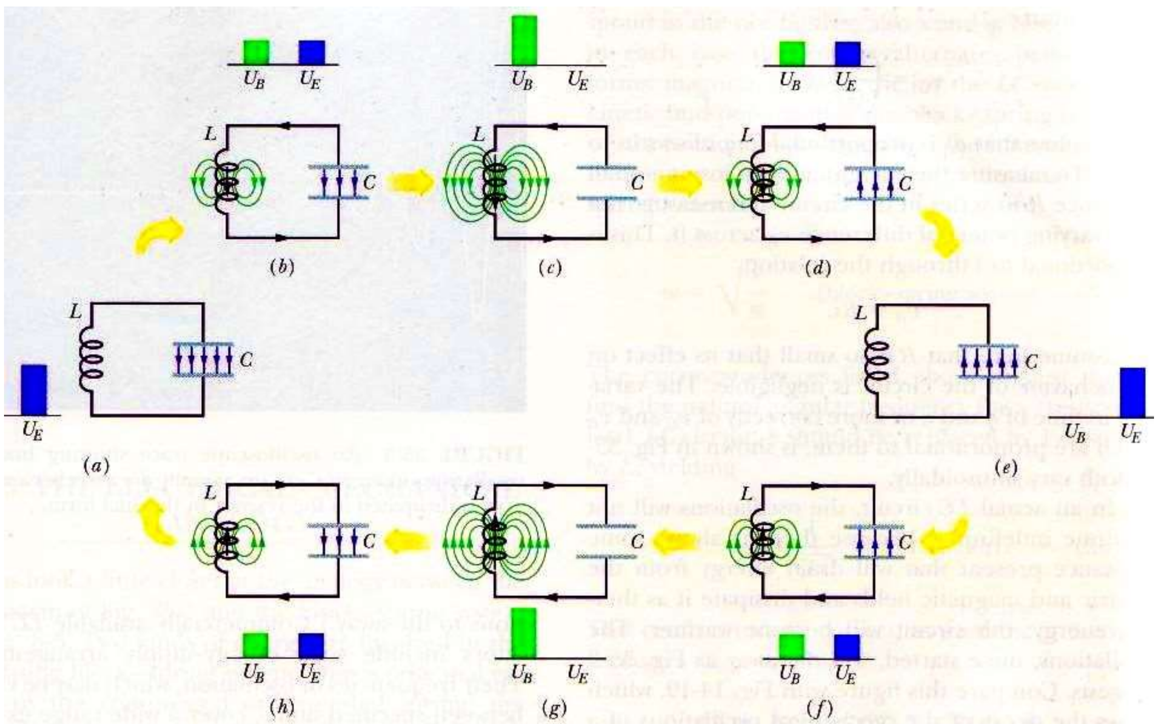



que significara $\frac{d^2Q}{dt^2}$?

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{dI}{dt}$$

cambio de la corriente!!!

# Circuito LC




$$\frac{Q}{C} = L\frac{dI}{dt}$$

*pero*

$$I = -\frac{dQ}{dt} \text{ porque disminuye la corriente}$$

$$\therefore dQ = -Idt \rightarrow \int_0^Q dQ = -\int_0^t Idt \rightarrow Q = -\int_0^t Idt$$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t Idt = 0$$

*derivando*

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{C}I = 0$$

ecuación diferencial análoga

al oscilador harmónico

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

*solución*

$$I = I_0\cos(\omega t + \varphi)$$

*con*

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

# Circuito LC

$$L\frac{d^2 I}{dt^2}+\frac{1}{C}I=0$$

ecuación diferencial análoga

al oscilador harmónico

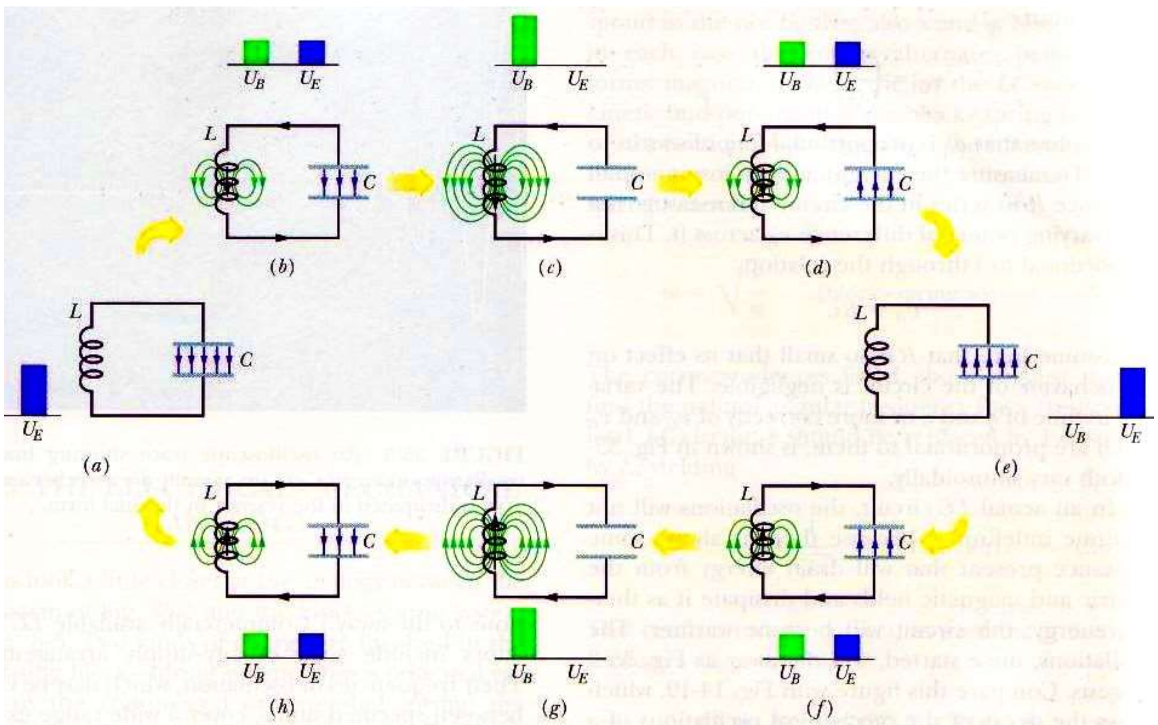
$$m\frac{d^2 x}{dt^2}+kx=0 \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0 \quad \text{con} \quad \omega^2=\frac{k}{m}$$

*solución*

$$I=I_0\cos(\omega t+\varphi)$$

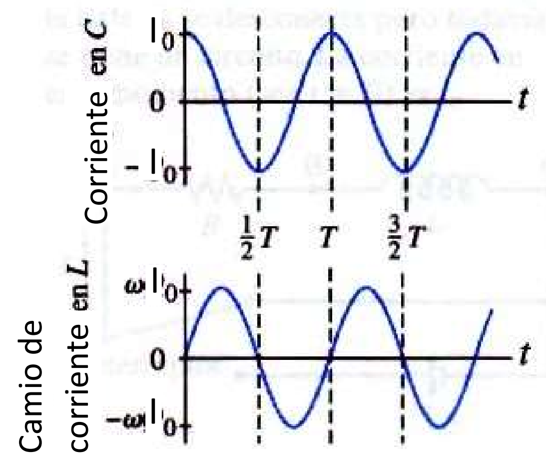
*con*

$$\omega^2=\frac{1}{LC}$$

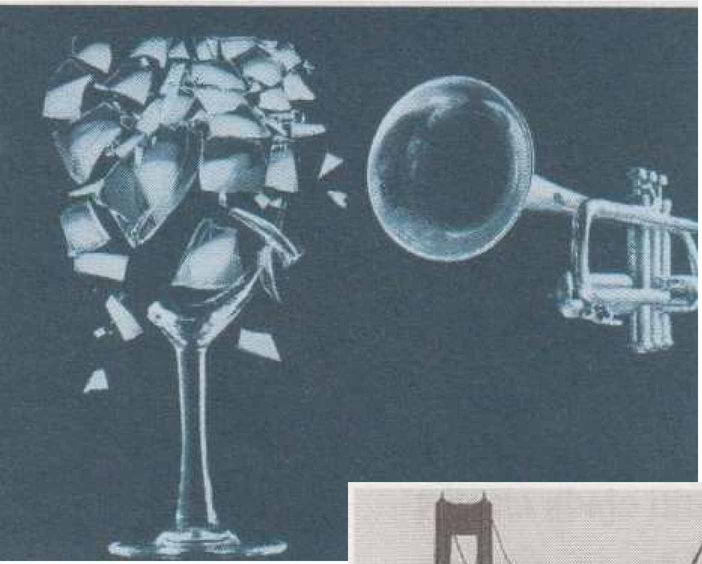


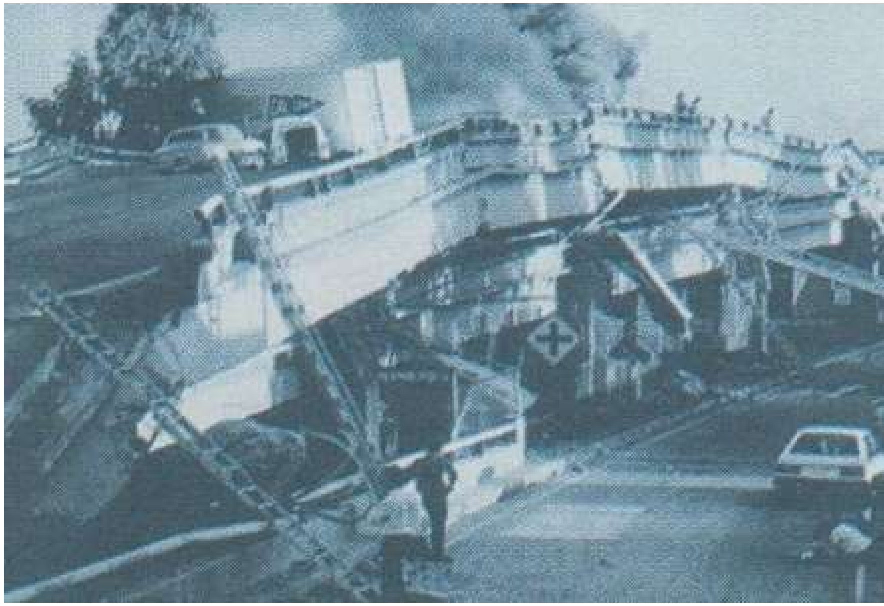

**corriente $I$ en un circuito $LC$. El periodo es**

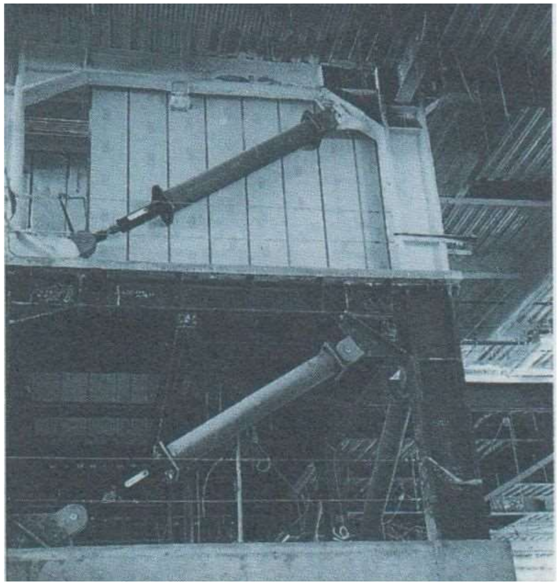
$$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}.$$



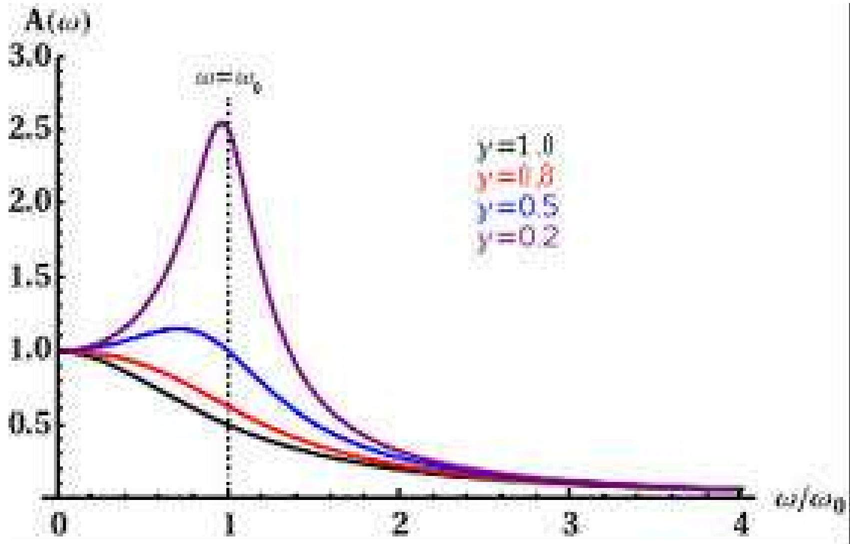
# Resonancia

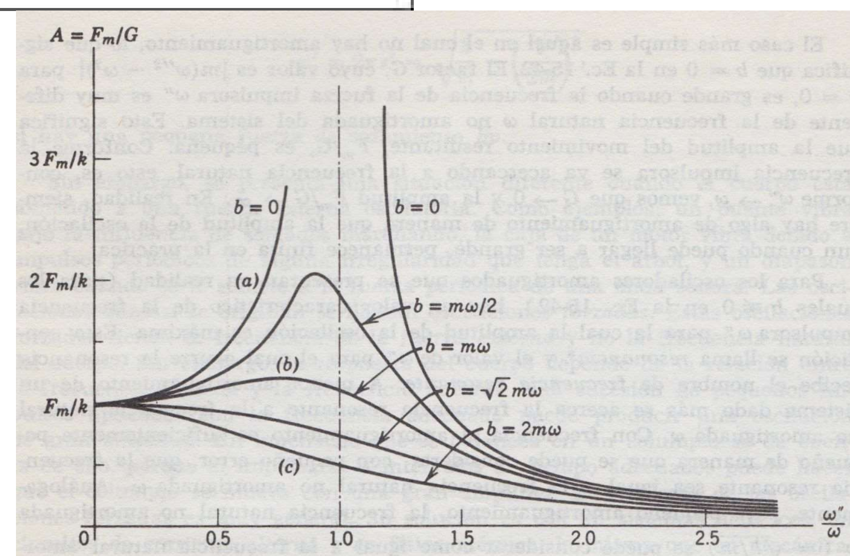




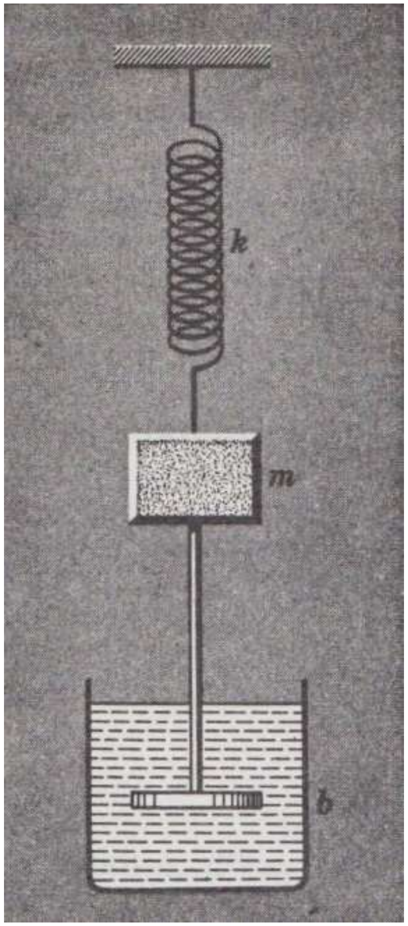


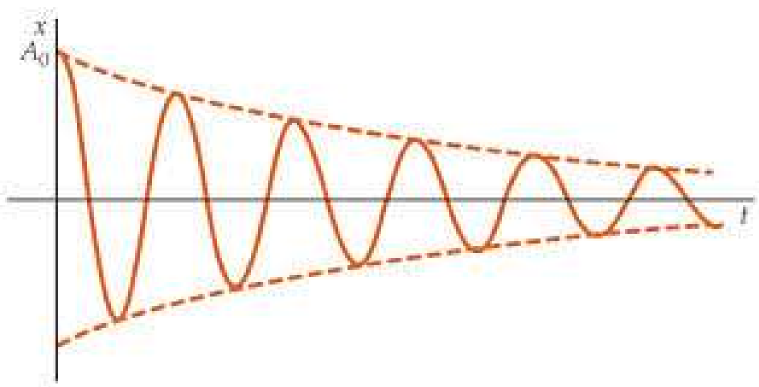
# Resonancia
# Forma distinta de verla

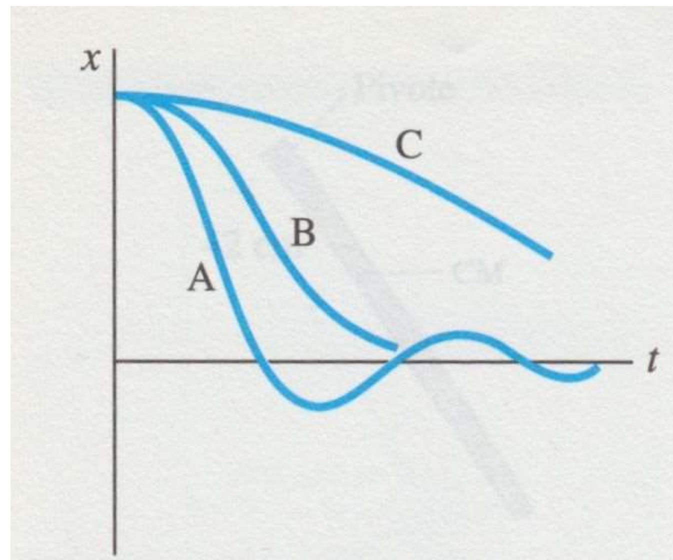


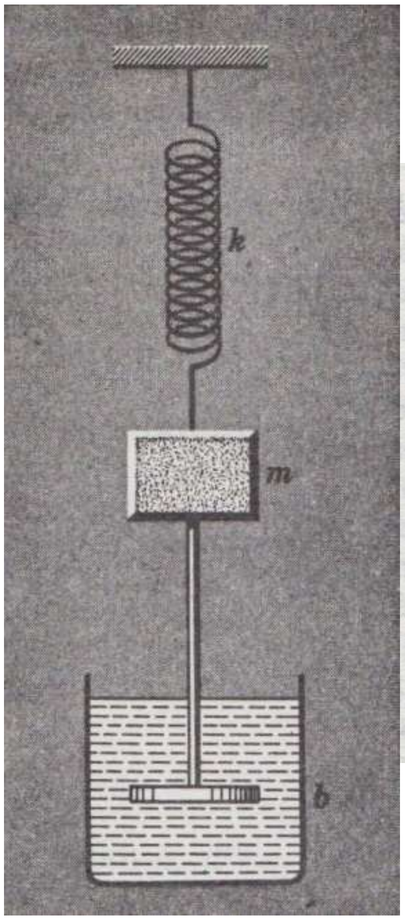
# Movimiento armónico amortiguado

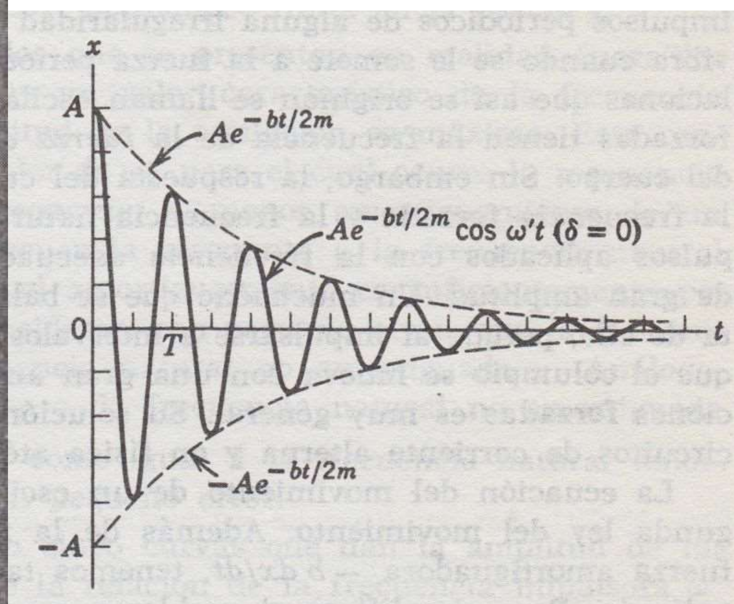


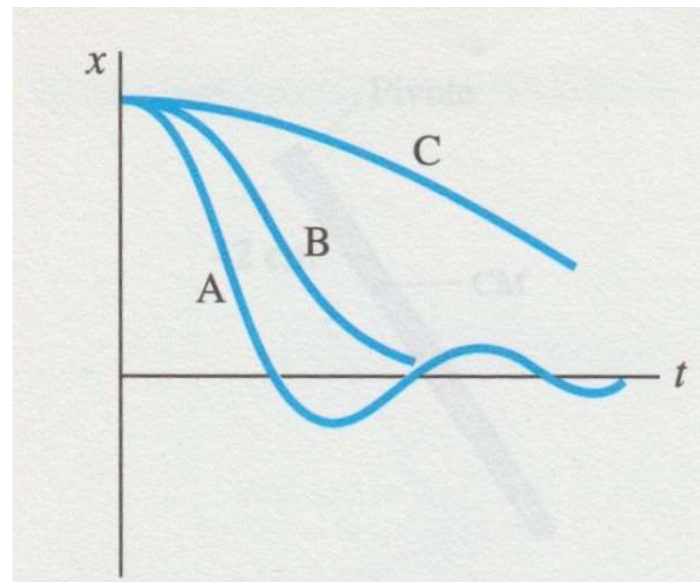



# Movimiento armónico amortiguado



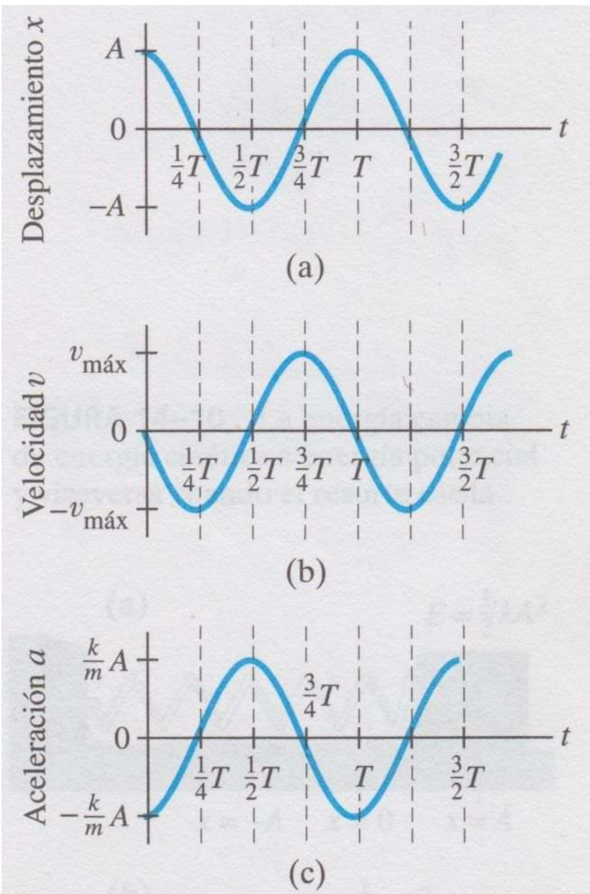



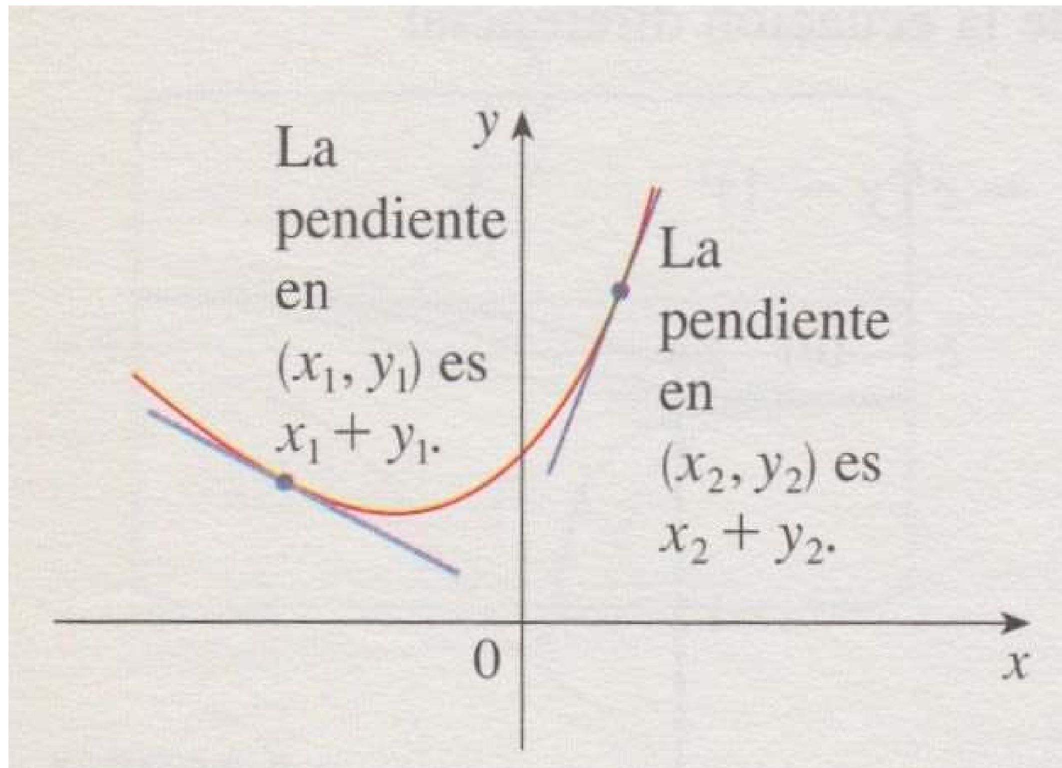



# Campos Direccionales y Curvas Solucion

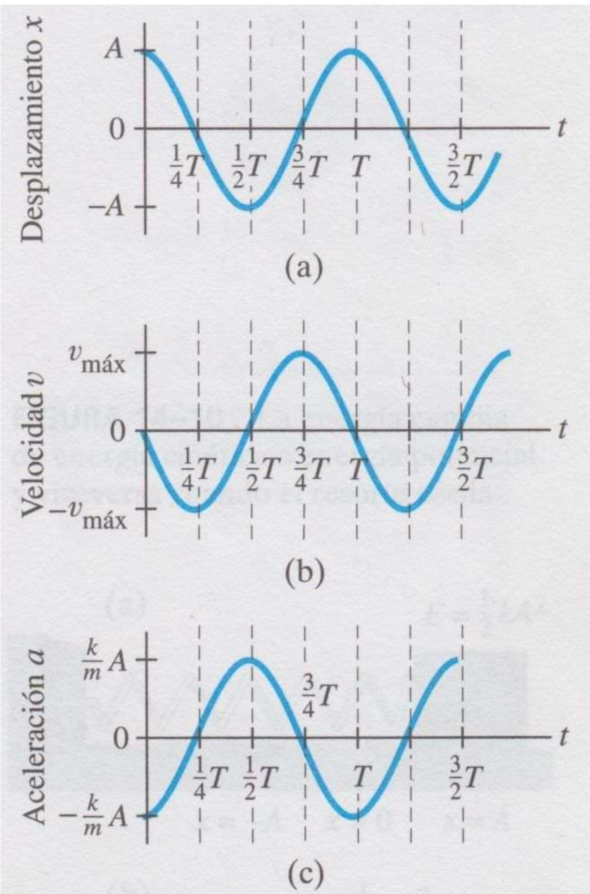
# Ecuaciones de Segundo grado

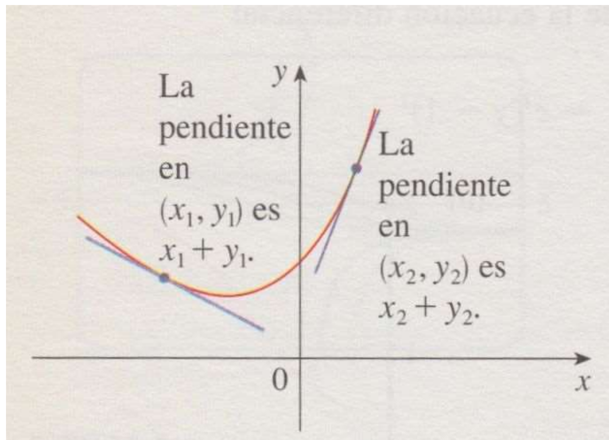
Lo que nos está proporcionando la ecuación diferencial es una serie de curvas con

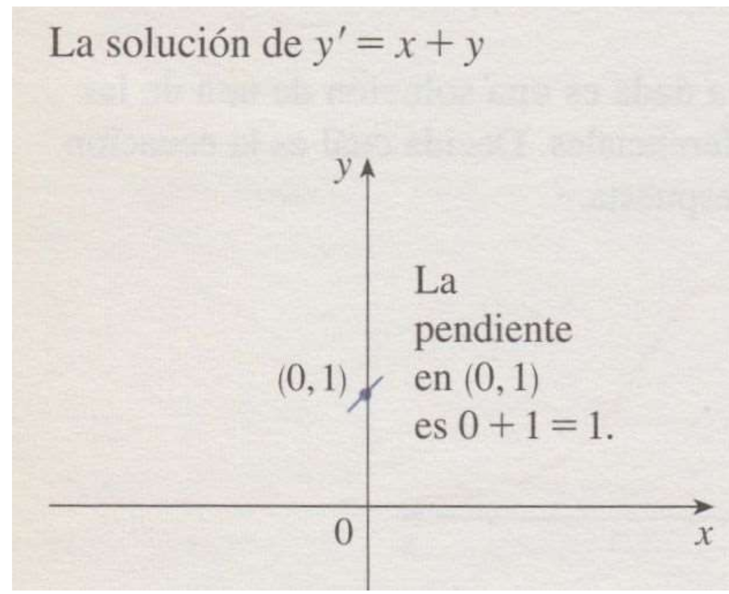


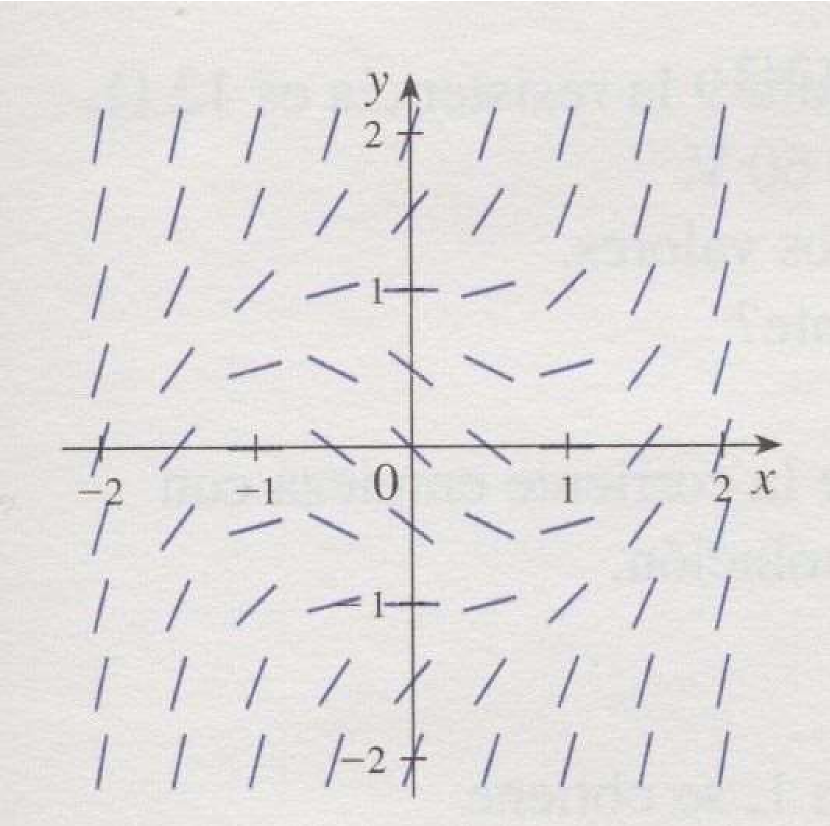
Y las condiciones iniciales nos indican una sola curva de entre todas las posbibles

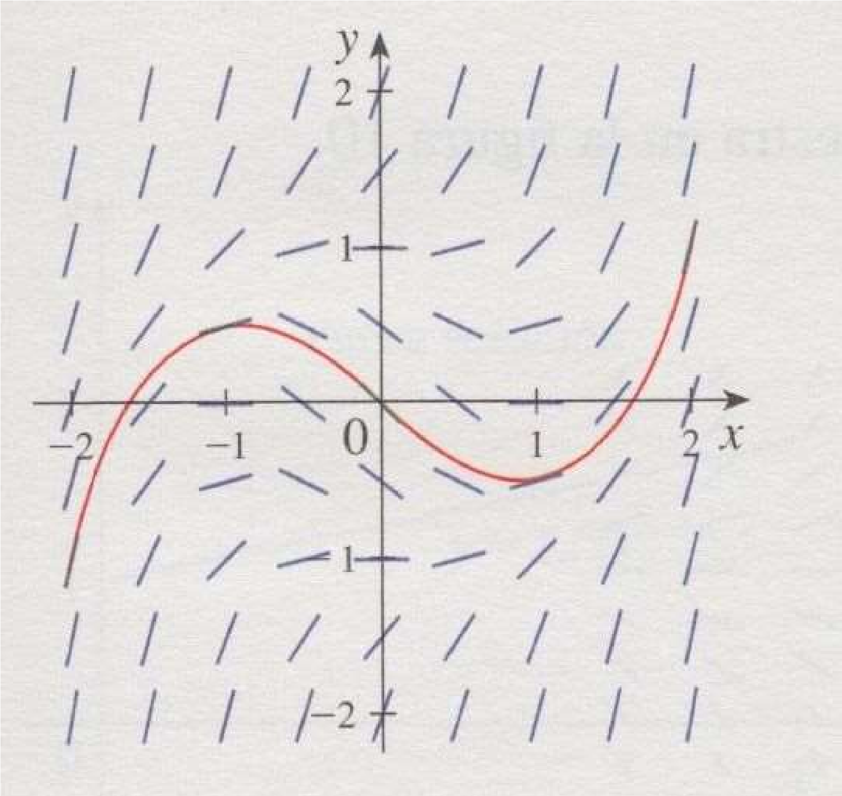


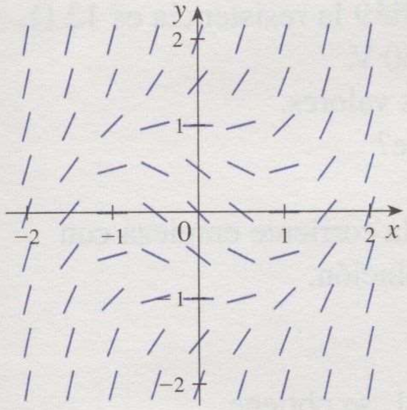



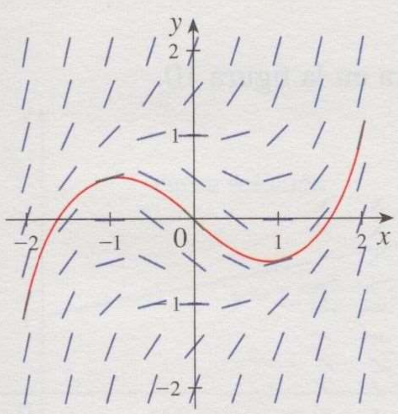



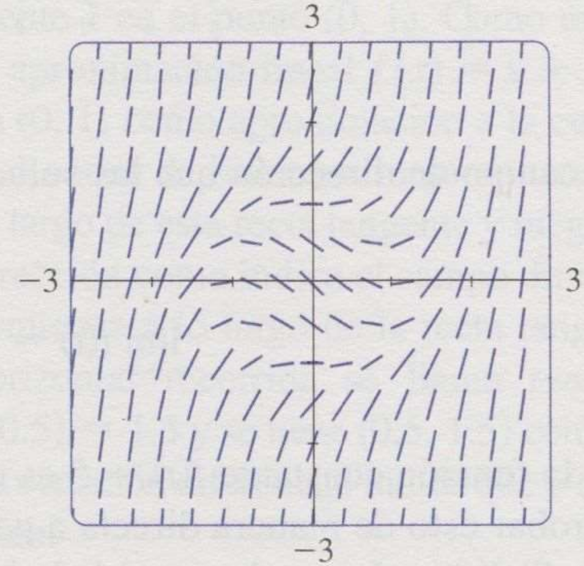
Así, las diferentes pendientes definen un conjunto de curvas que además son un indicativo de la curva única solución

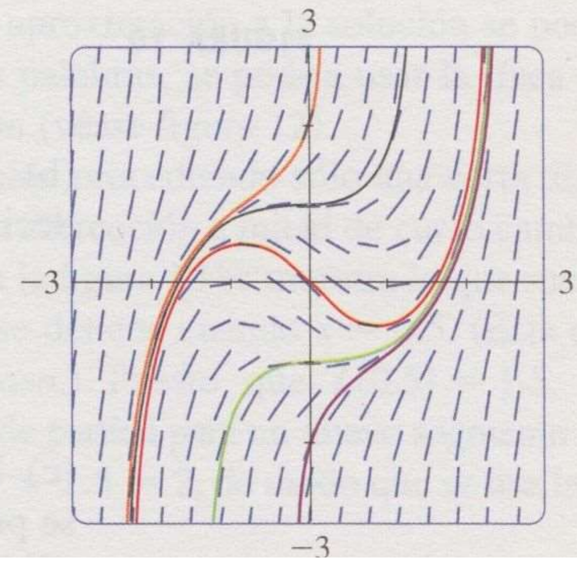



y
2
1
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2


y
2
1
−2
−1
0
1
2
x
−1
−2


3
−3
3
−3


3
−3
3
−3

# Y proporcionan información extra: Equilibrio