Rotación

Dr. Rogerio Enríquez

Velocidad Angular

$$ds = Rd\theta$$

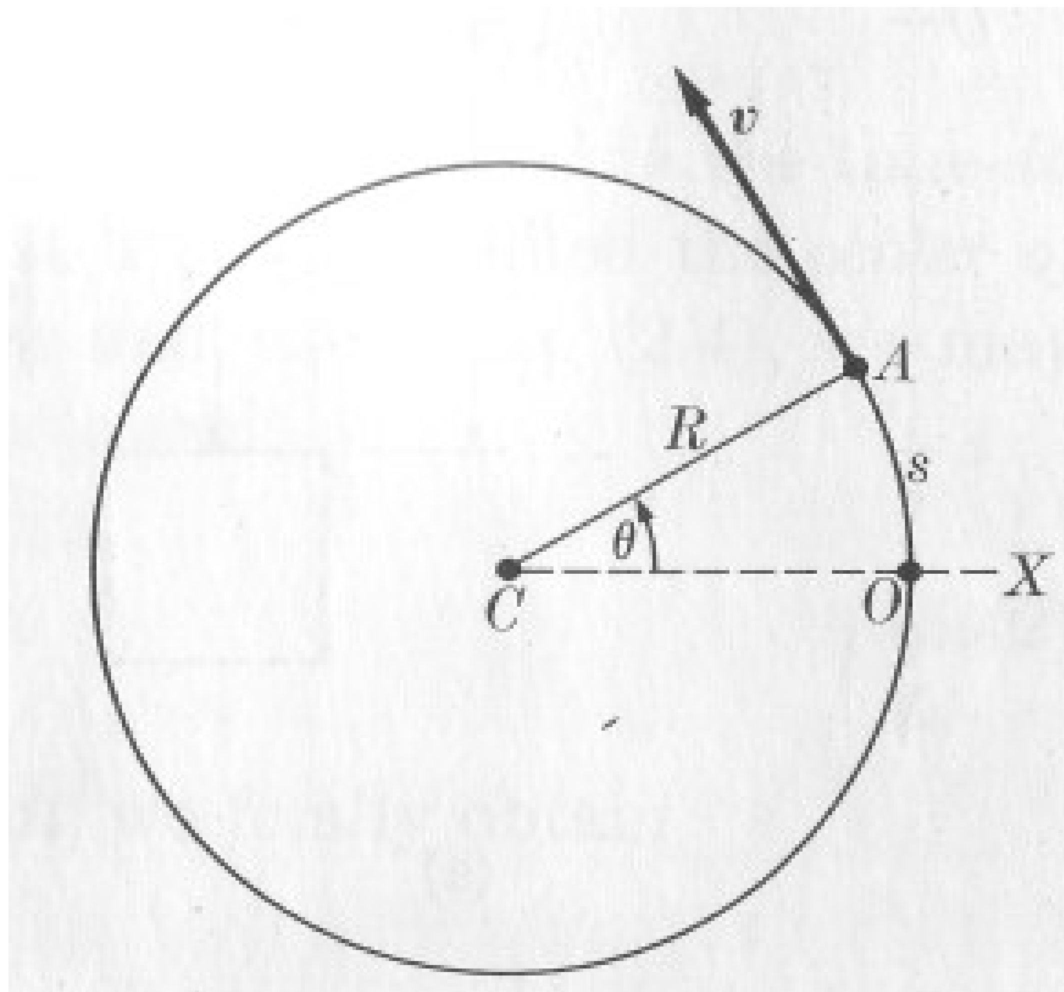
$$\int ds = \int Rd\theta$$

$$s = R\theta + c$$

$$\text{v} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \text{v} = R\omega$$



Velocidad Angular

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\int_{\theta 0}^{\theta} d\theta = \int_{t0}^{t} \omega dt$$

$$\theta - \theta_0 = \omega(t - t_0)$$

recuerde que en un sistema de
referencia propiamente seleccionado

$$\theta = \omega t$$

en una vuelta completa

$\theta = 2\pi$ y el tiempo es

$t = T,$ un periodo

que representado mas comunmente como
vueltas por segundo llamada frecuencia

y que cumple con $f = \dfrac{1}{T}$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi f$$

Aceleración Angular

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$== \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$$

$$\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$$

en el marco de referencia

propiamente seleccionado

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Díptico

Lineal

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\|\mathbf{F}\| = m\|\mathbf{a}\|$$

$$F = ma$$

Circular

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$$

$$s = R\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\tau = I\alpha$$

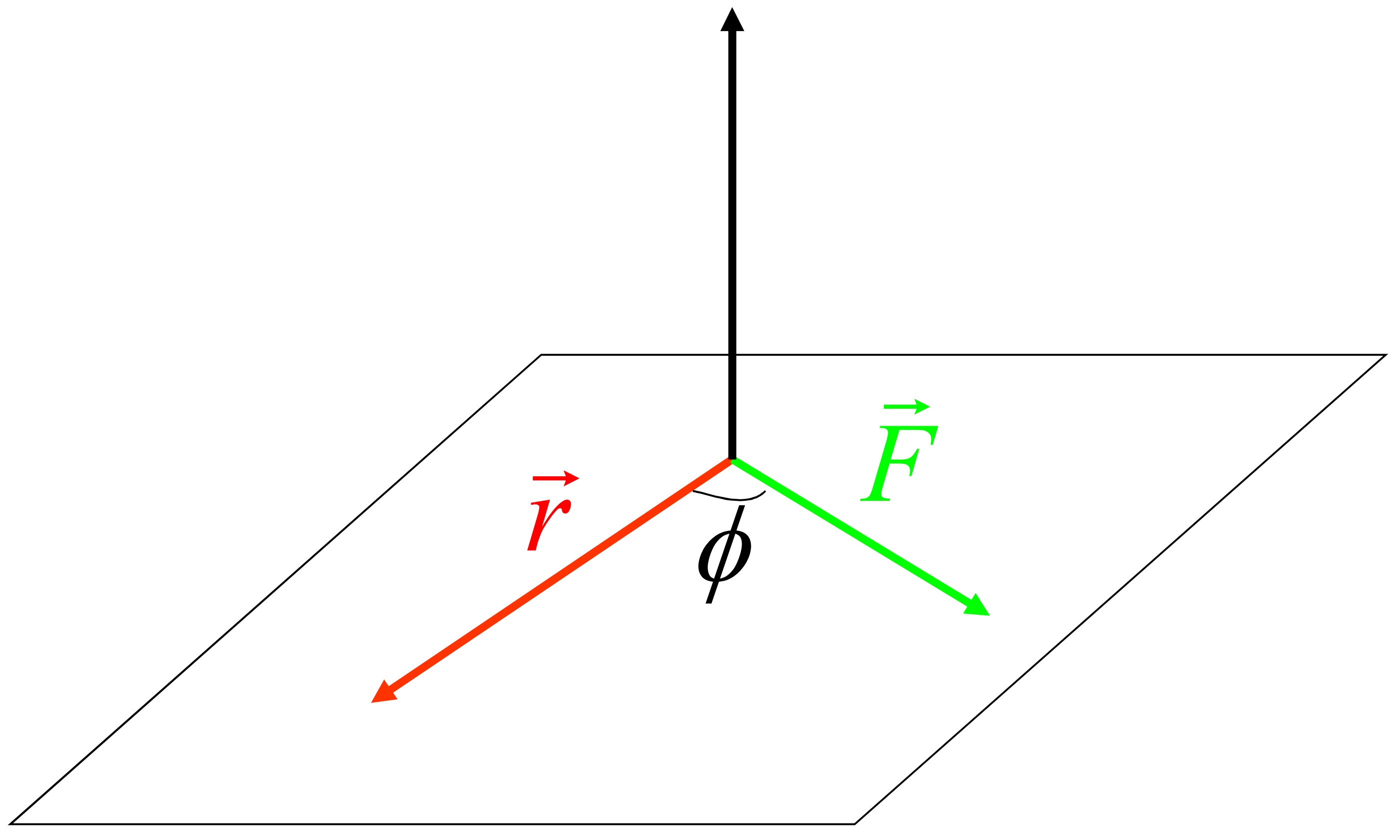
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

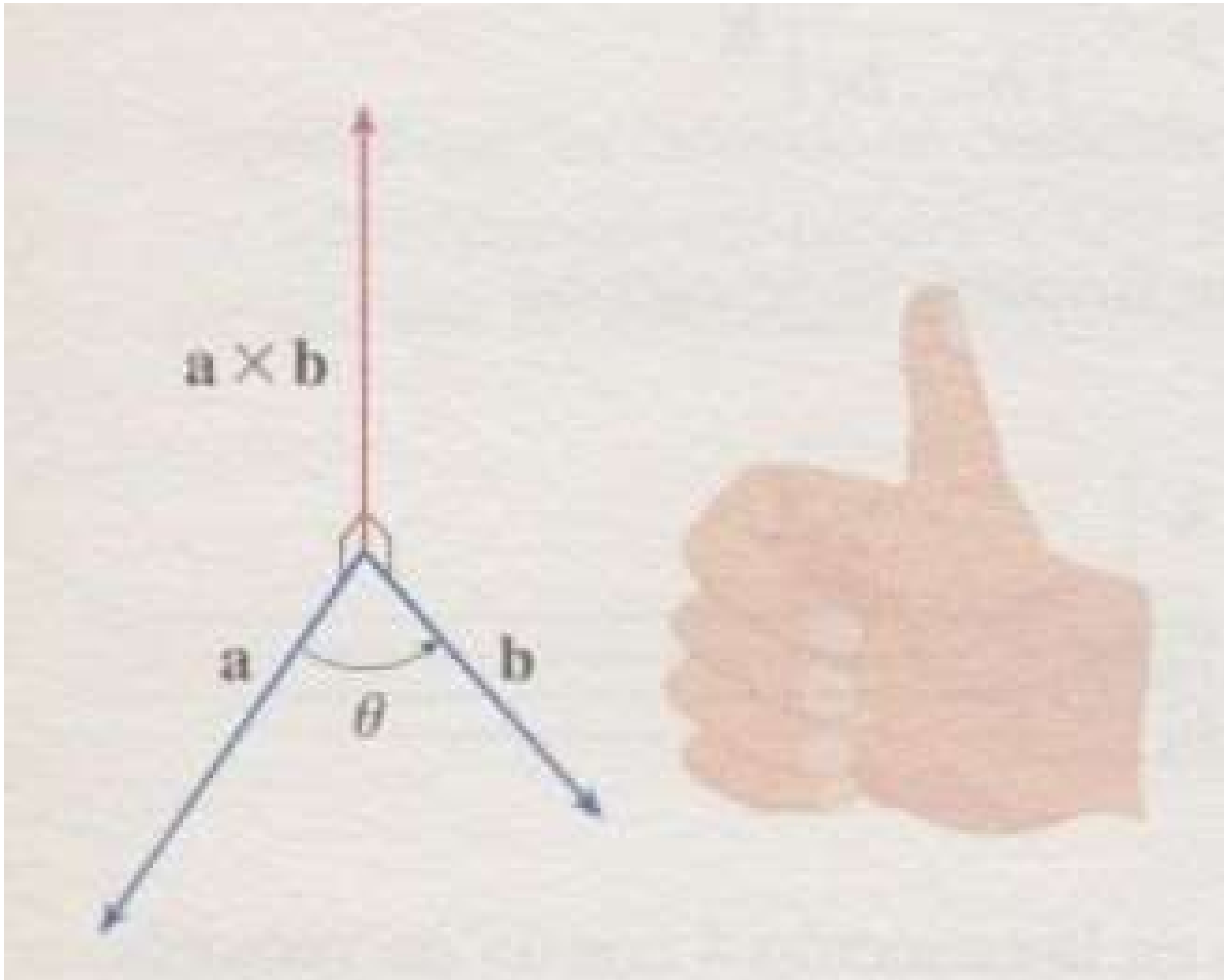
$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{F}\| \sin\beta$$

$$\tau = I\alpha$$

La torca o momento de una fuerza

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$





$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
$\mathbf{a}$
$\mathbf{b}$
θ

1 DEFINICIÓN Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces el **producto cruz** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= (-15 - 28)\,\mathbf{i} - (-5 - 8)\,\mathbf{j} + (7 - 6)\,\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 \\
&\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta \qquad \text{(por el Teorema 12.3.3)} \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}
$$

$\boxed{7}$ **COROLARIO** Dos vectores no nulos **a** y **b** son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Si se aplican los teoremas 5 y 6 a los vectores base estándar **i**, **j** y **k** con $\theta = \pi/2$, se obtiene

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

Observe que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} \neq \mathbf{j} \times \mathbf{i}$$

Así, el producto cruz no es conmutativo. También,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

mientras que

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

Así, la ley asociativa para la multiplicación por lo común no se cumple; es decir, en general,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

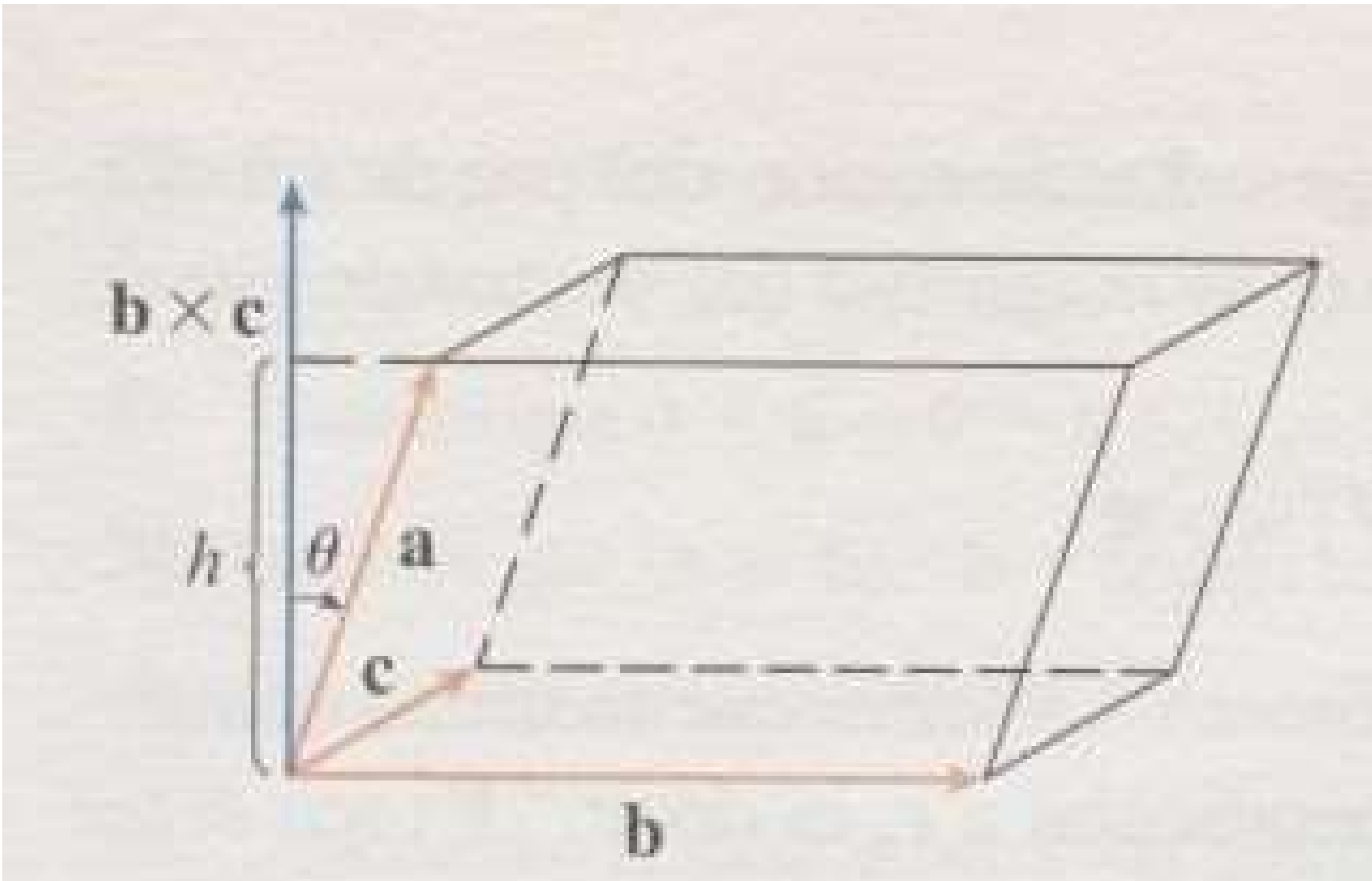
5 TEOREMA El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

DEMOSTRACIÓN A fin de demostrar que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$, se calcula su producto punto como sigue:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} a_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} a_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_3 \\
&= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\
&= a_1a_2b_3 - a_1b_2a_3 - a_1a_2b_3 + b_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 - b_1a_2a_3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

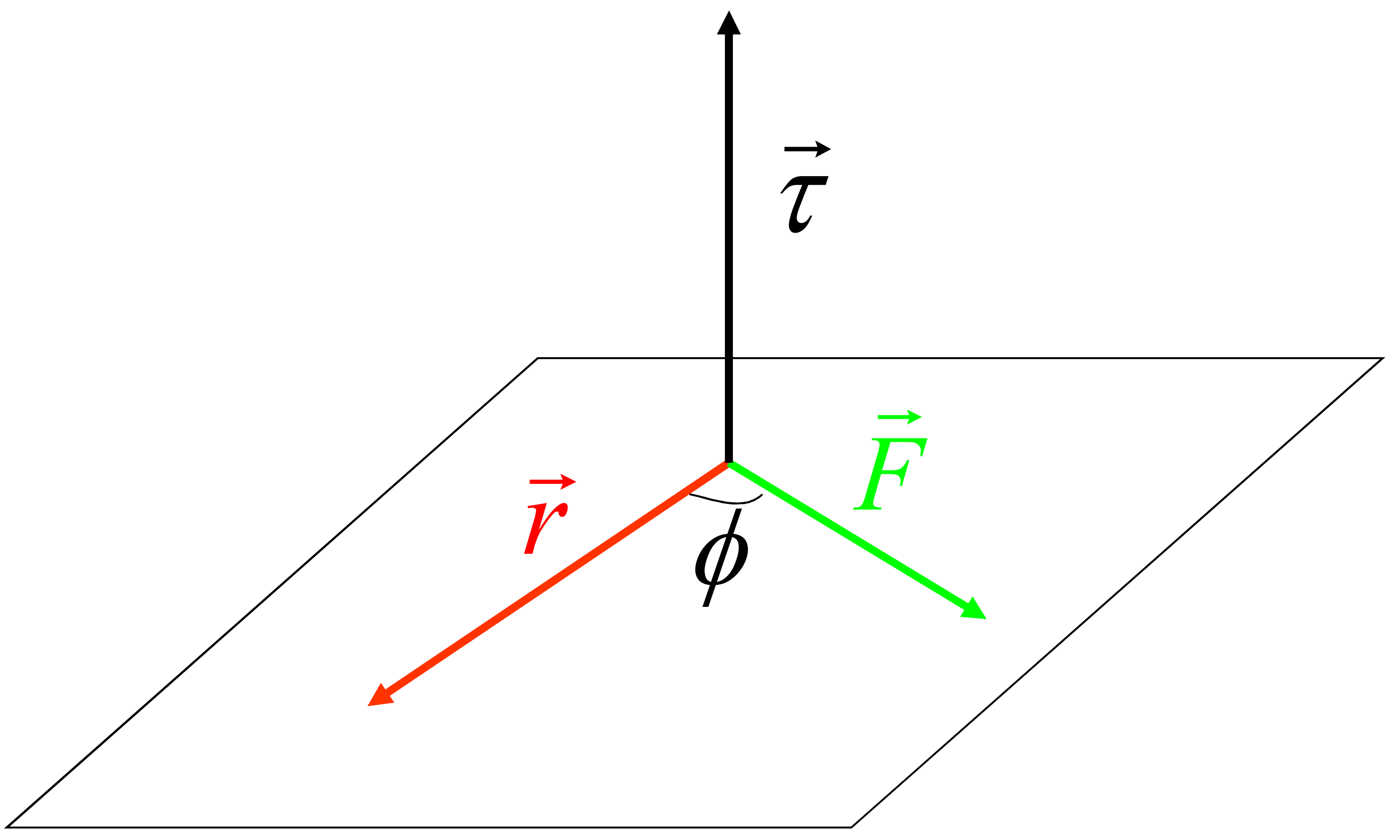


8 TEOREMA Si **a**, **b** y **c** son vectores y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

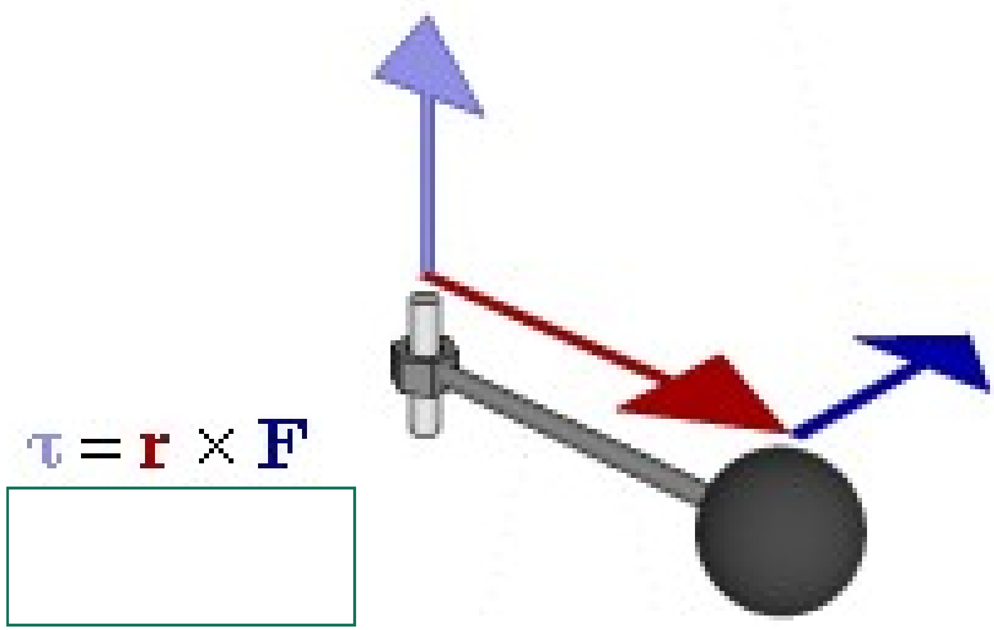
La torca o momento de una fuerza

$$\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \sin\phi$$



La torca o momento de una fuerza

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

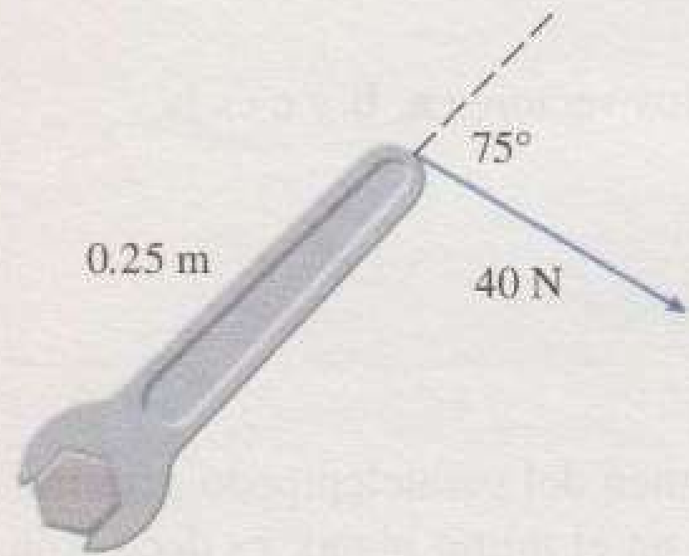


La torca o momento de una fuerza

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \sin\phi$$

En SI: $[\tau] = \text{Newton} \cdot \text{metro}$

En CGS: $[\tau] = \text{Dina} \cdot \text{cm}$



EJEMPLO 6 Se aprieta un perno aplicando una fuerza de 40 N a una llave de 0.25 m como se muestra en la figura 5. Encuentre la magnitud del par de torsión respecto al centro del perno.

SOLUCIÓN La magnitud del vector del par de torsión es

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\tau}| &= |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75^\circ = (0.25)(40) \operatorname{sen} 75^\circ \\
&= 10 \operatorname{sen} 75^\circ \approx 9.66 \text{ N·m}
\end{aligned}
$$

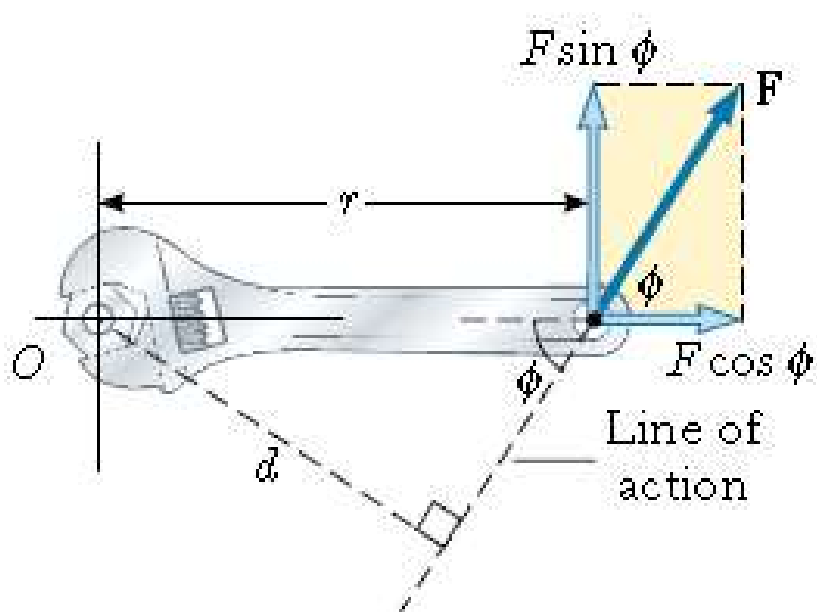
Si el perno tiene cuerda derecha, entonces el vector de par de torsión es

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\,\mathbf{n} \approx 9.66\,\mathbf{n}$$

donde **n** es un vector unitario con dirección hacia la página. □

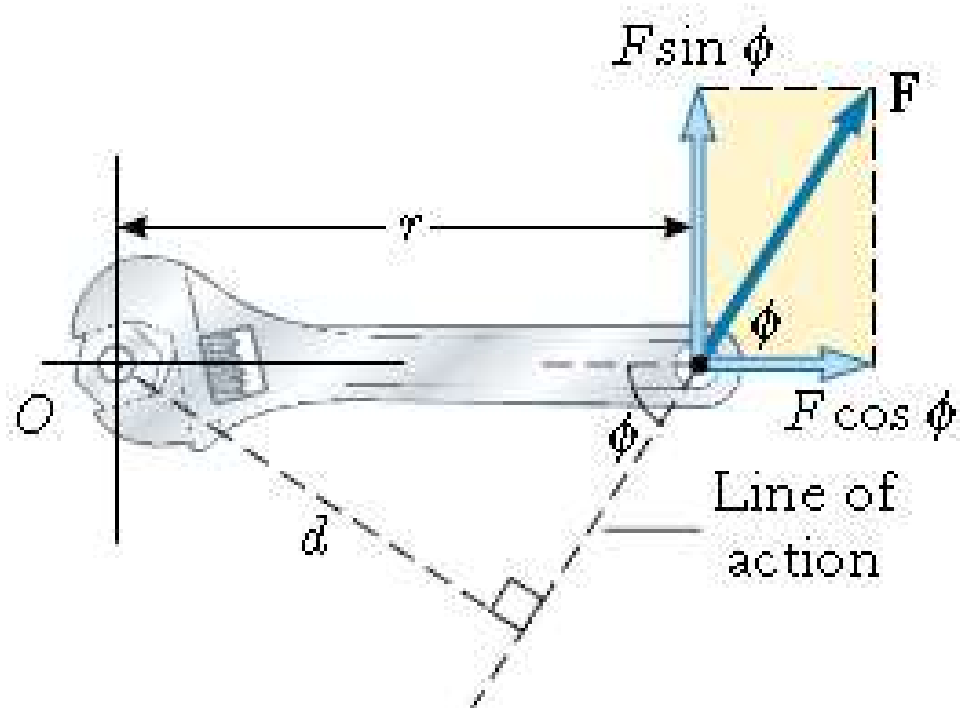
La torca o momento de una fuerza

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



La torca o momento de una fuerza

$$\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \sin\phi$$



La torca o momento de una fuerza

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

El momento de fuerza es equivalente al concepto de *par motor*, es decir, la fuerza que se tiene que hacer para mover un cuerpo respecto a un punto fijo y se condiciona por la masa y la distancia.

La torca o momento de una fuerza

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

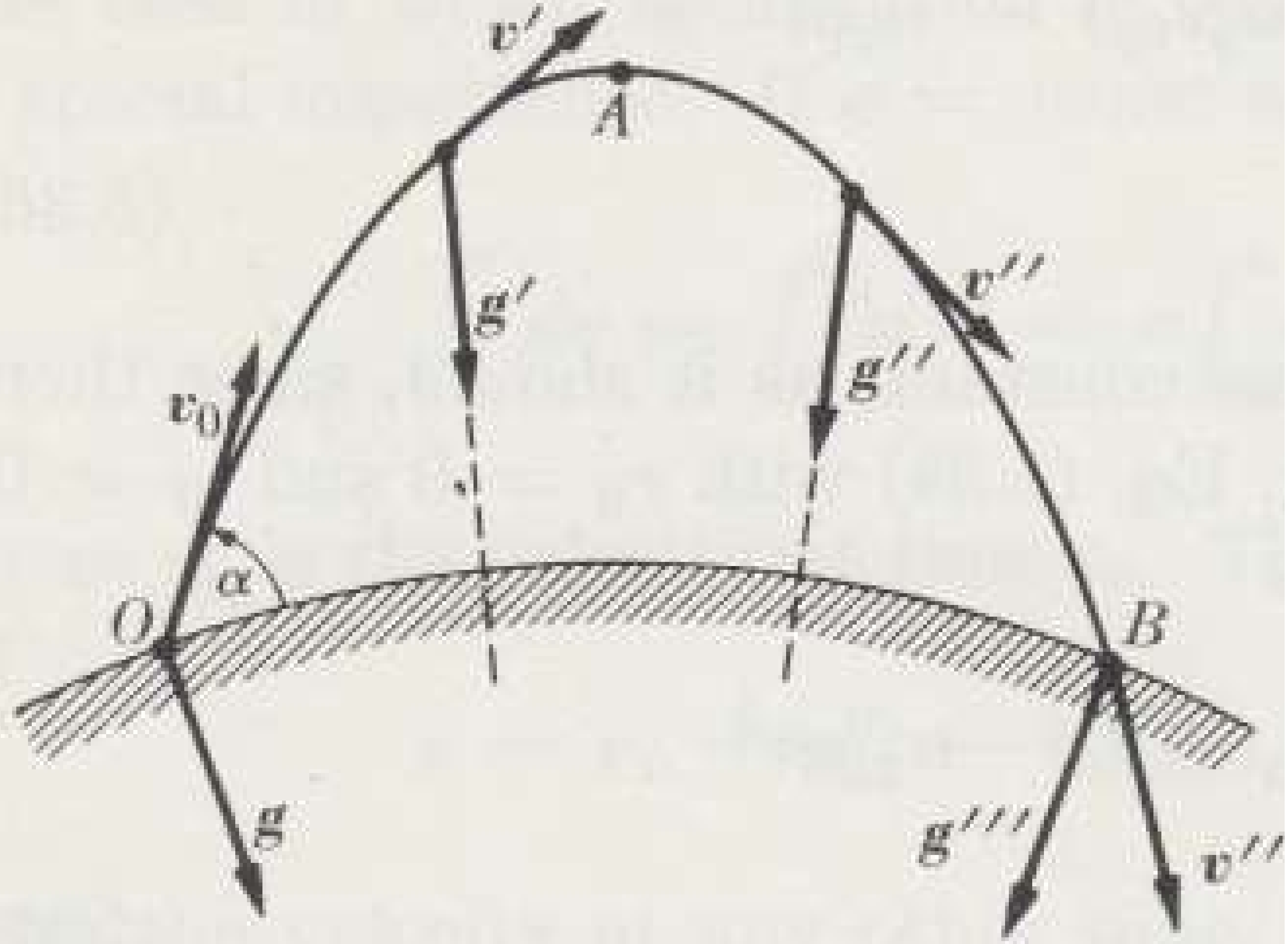
El momento de una fuerza con respecto a un punto da a conocer en qué medida existe capacidad en una fuerza o desequilibrio de fuerzas para causar la rotación del cuerpo con respecto a éste.

La torca o momento de una fuerza

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

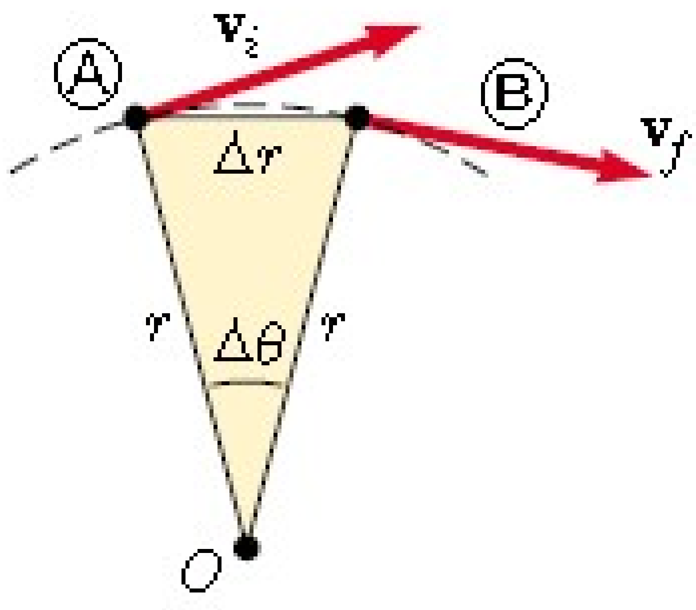
El momento tiende a provocar un giro en el cuerpo o masa sobre el cual se aplica y es una magnitud característica en elementos que trabajan sometidos a torsión (como los ejes de maquinaria) y en elementos que trabajan sometidos a flexión (como las vigas).

¿Y si no hay torca?



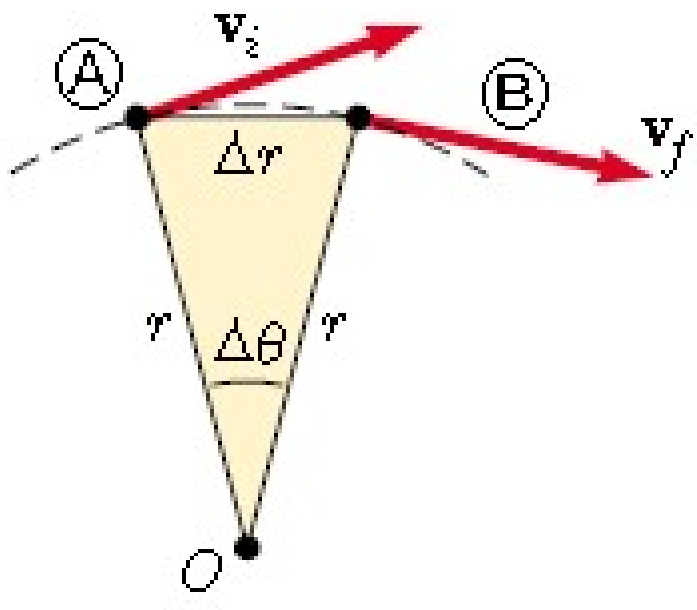
v'
A
g'
v''
g''
v_0
α
O
B
g
g'''
v'''

Movimiento circular uniforme



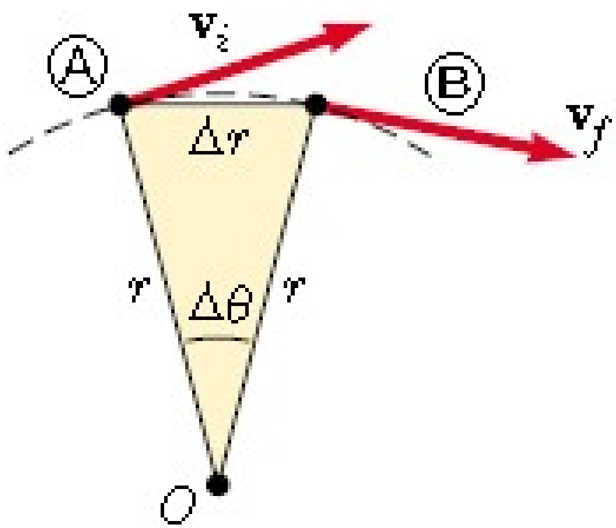
Aunque la rapidez $\left|\vec{v}\right|$ es constante, el movimiento es acelerado, ya que la velocidad $\vec{v}$ cambia continuamente.

Movimiento circular uniforme



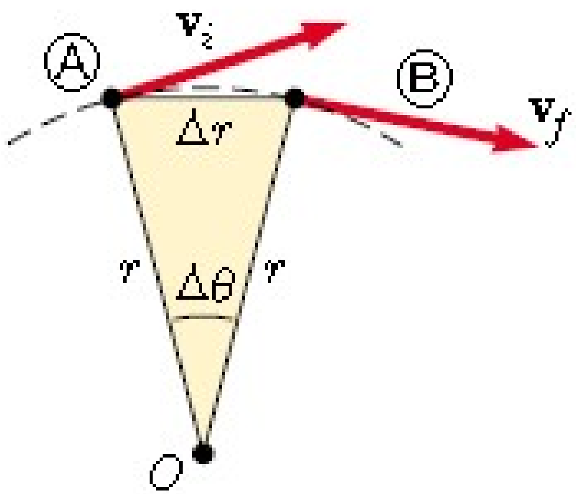
Dado que la rapidez
es constante,
la aceleración no
puede tener ninguna
componente tangencial.

Movimiento circular uniforme



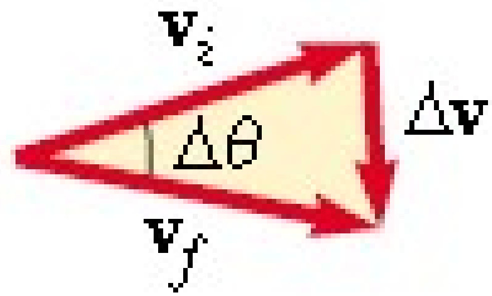
$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Movimiento circular uniforme



Estos dos triángulos son semejantes

$\Leftrightarrow$



Por lo tanto, $\dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{\Delta r}{r}$

Movimiento circular uniforme

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{y} \qquad \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$\Delta v = \frac{v}{r}\Delta r \qquad \Rightarrow \qquad \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Ahora

$$a_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Movimiento circular uniforme

Por tanto, la aceleración centrípeta (que en griego es algo así como "buscando el centro") es

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

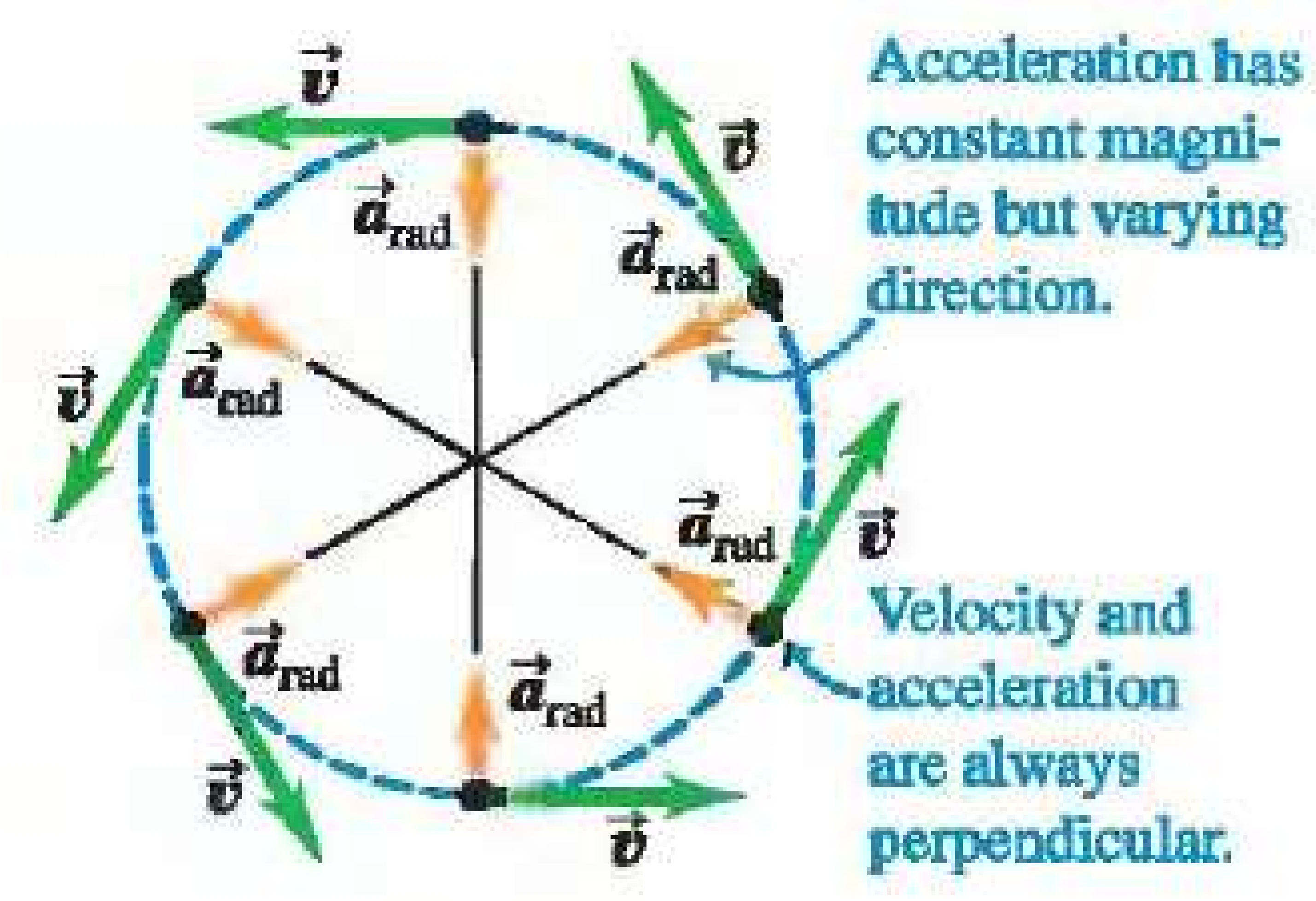
y está dirigida siempre hacía el centro de la circunferencia.

Movimiento circular uniforme

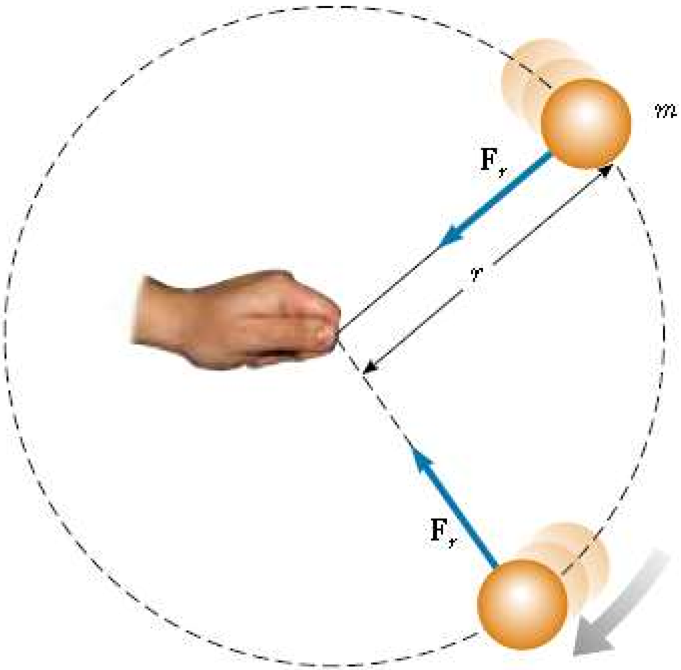
La aceleración centrípeta es $a_r = \dfrac{v^2}{r}$

$$\left[a_r\right] = \frac{\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Movimiento circular uniforme



Movimiento circular uniforme

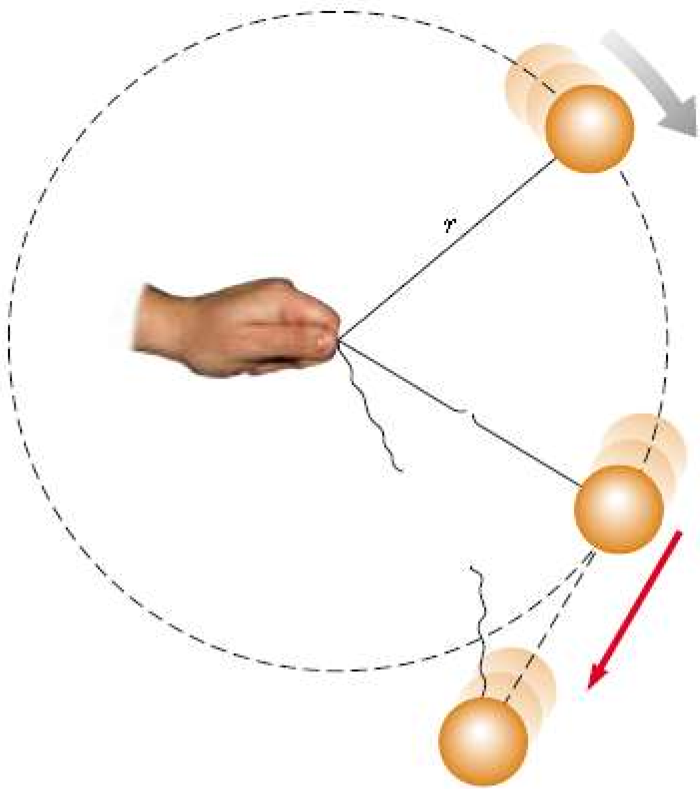


Las fuerzas que causan la aceleración centrípeta $a_r = \dfrac{v^2}{r}$:

$$\sum F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r}$$

En ocasiones se le dice fuerza centrípeta, pero esa denominación conduce a errores.
Son las "fuerzas comunes" (la gravitacional, la eléctrica, una tensión, etc.) causando el movimiento circular.

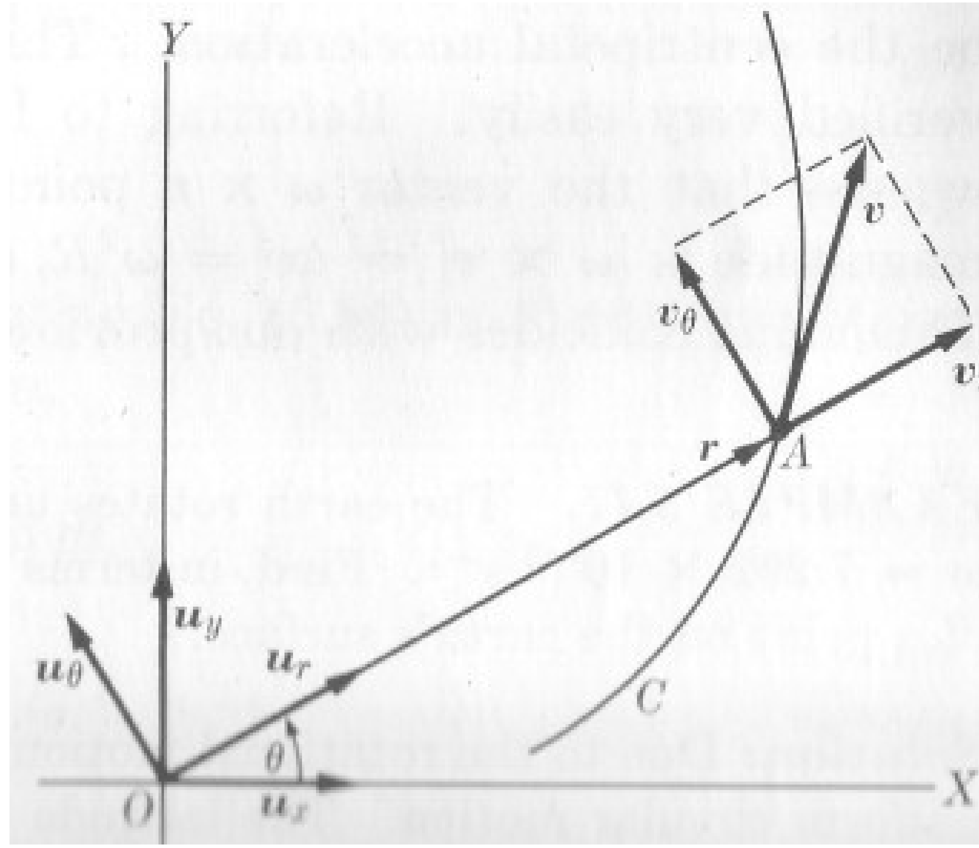
Movimiento circular uniforme



Si la fuerza que causa el movimiento circular cesa, entonces el cuerpo se moverá en línea recta siguiendo la tangente.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dx}\mathbf{u_r} r$$

$$= \mathbf{u_r}\frac{dr}{dt} + \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} r$$



$$\mathbf{u_r} = \mathbf{u_x}\cos\theta + \mathbf{u_y}\sin\theta$$

$$\mathbf{u_\theta} = -\mathbf{u_x}\sin\theta + \mathbf{u_y}\cos\theta$$

$$\frac{d\mathbf{u_r}}{dx} = -u_x\sin\theta\frac{d\theta}{dt} + u_y\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

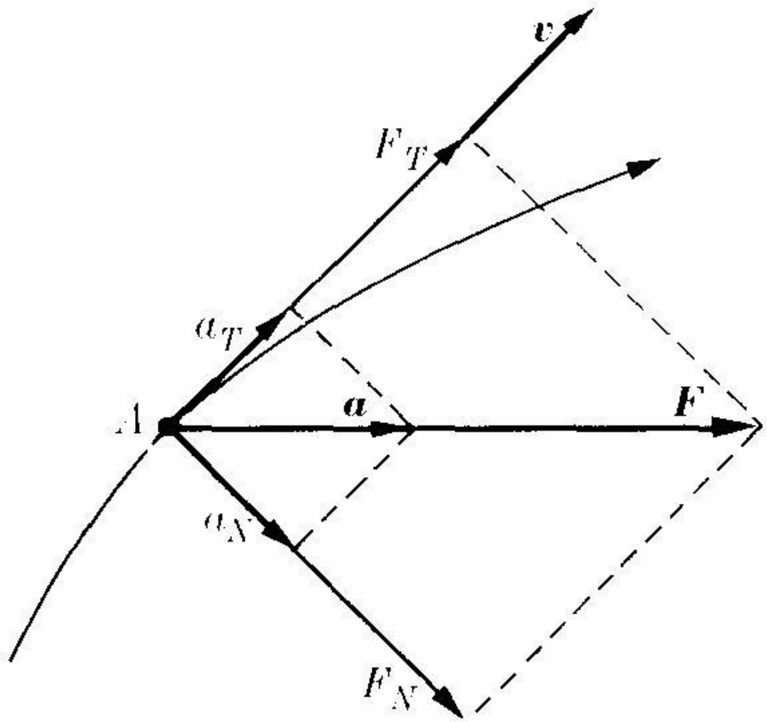
$$= \mathbf{u_\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

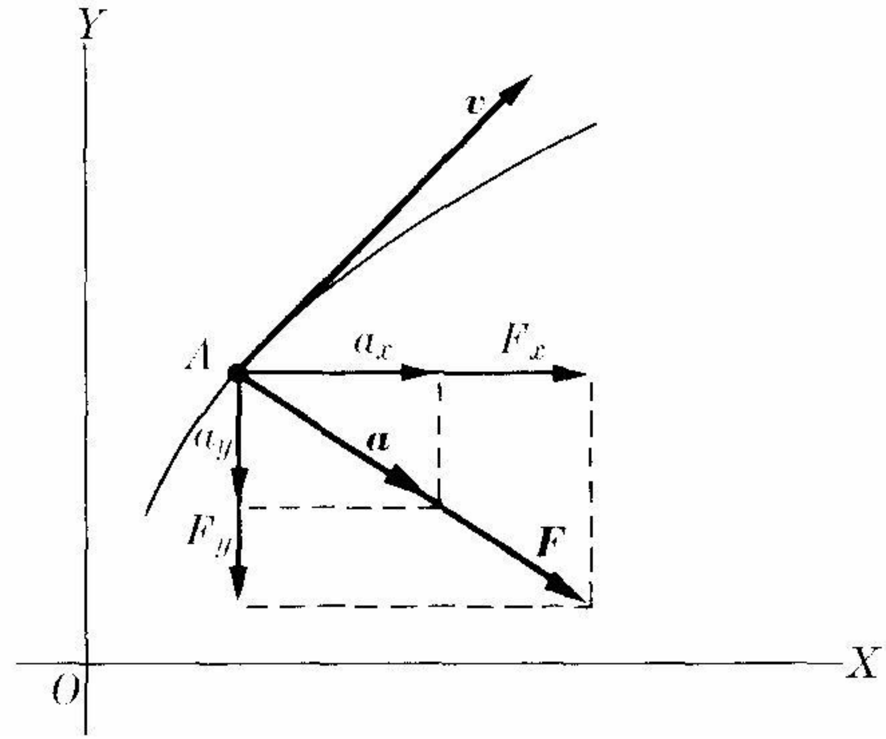
$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

si el origen de coordenadas esta en el centro del movimiento curvilineo

$\mathrm{v}_r = v_N \qquad \& \qquad v_\theta = v_T$

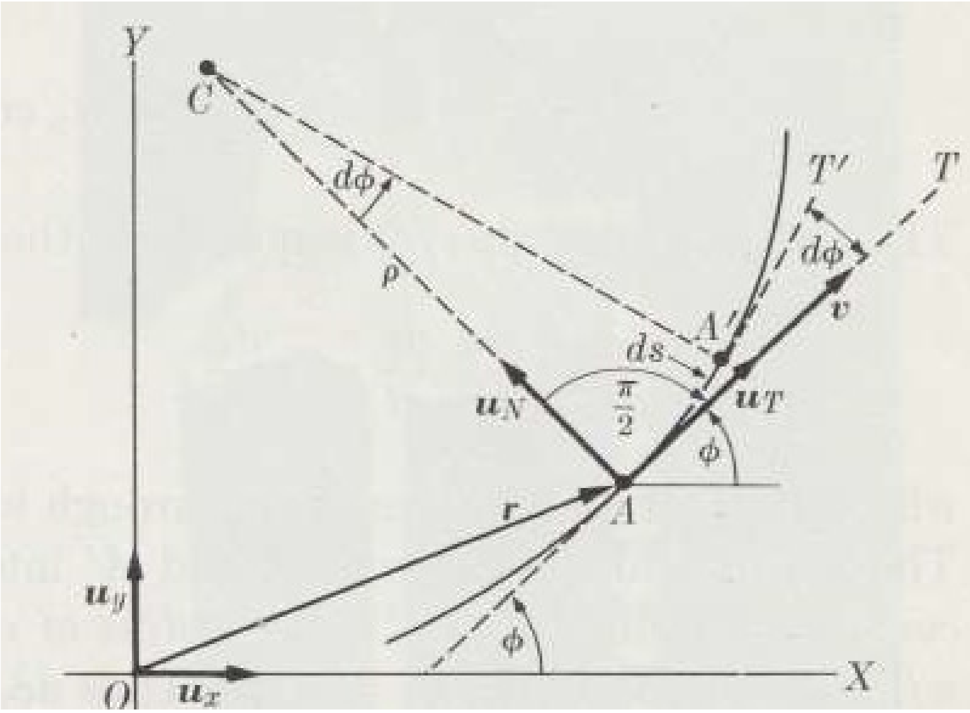
Movimiento Circular





$$F_T = ma_T = m\frac{dv}{dt} \leftarrow \text{cambio en magnitud de la velocidad}$$

$$F_N = ma_N = m\frac{v^2}{R} \leftarrow \text{cambio en la direccion de la velocidad}$$



$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dx}\mathbf{u}_T v$$

$$= \mathbf{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\mathbf{u}_T}{dt} v$$

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_x \cos\phi + \mathbf{u}_y \sin\phi$$

$$\mathbf{u}_N = -\mathbf{u}_x \sin\phi + \mathbf{u}_y \cos\phi$$

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dx} = -u_x \sin\phi \frac{d\phi}{dt} + u_y \cos\phi \frac{d\phi}{dt} = \mathbf{u}_N \frac{d\phi}{dt}$$

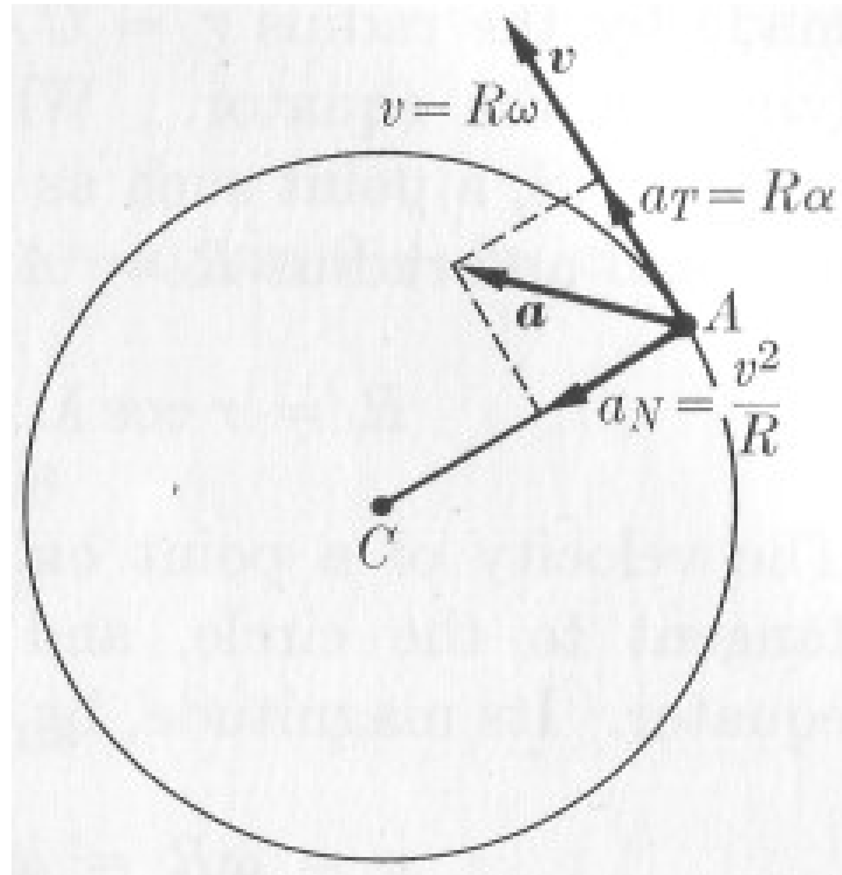
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\phi}{ds} \leftarrow \text{pero } ds = Rd\phi \Rightarrow \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dx} = \mathbf{u}_N \frac{v}{R}, \qquad \mathbf{a} = \mathbf{u}_T \frac{dv}{dt} + \mathbf{u}_N \frac{v^2}{R}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dx}\mathbf{u}_T v = \mathbf{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\mathbf{u}_T}{dt} v = \mathbf{u}_T \frac{dv}{dt} + \mathbf{u}_N \frac{v^2}{R}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad a_N = \frac{v^2}{R}$$

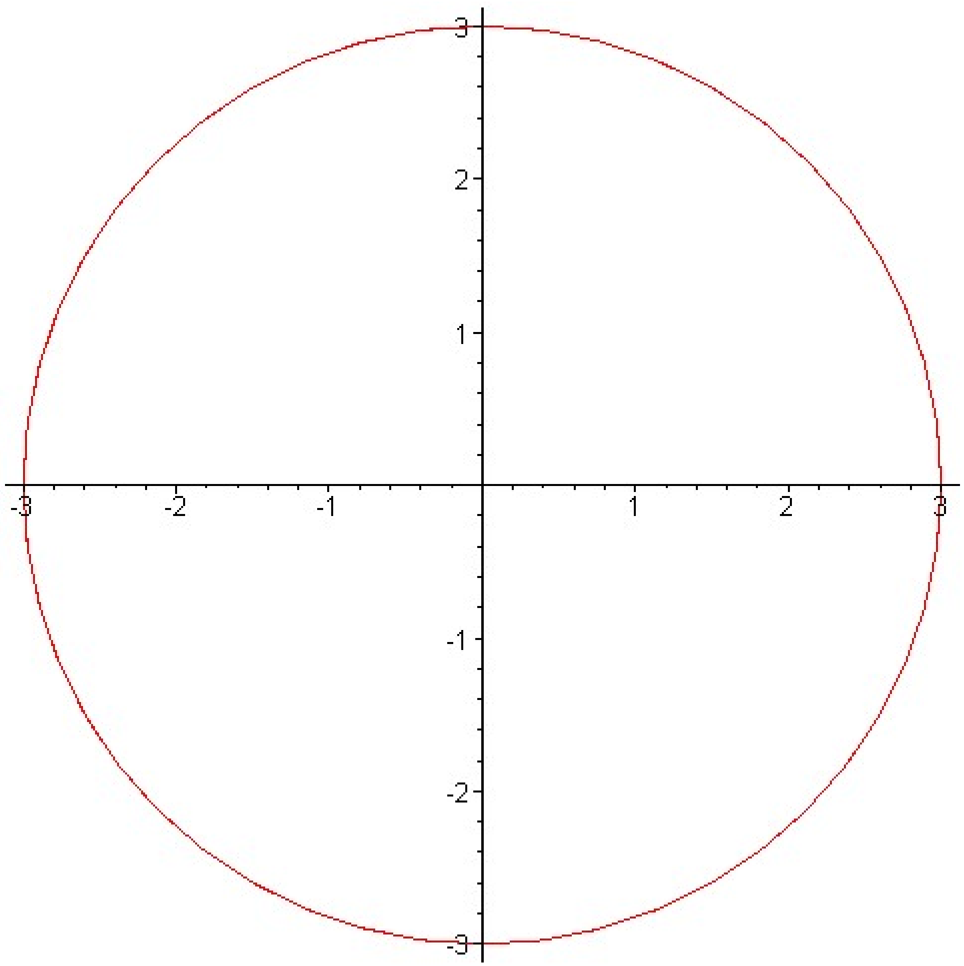
$$a = \sqrt{a_T^{\ 2} + a_N^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$



$$a_T = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Movimiento circular uniforme



$$x(t) = A\cos(\omega t) \qquad y(t) = A\sin(\omega t)$$

Movimiento circular uniforme

$$\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right) = \left(\mathrm{R}\cos(\omega t), \mathrm{R}\sin(\omega t)\right)$$

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin(\omega t) =$$

$$= R^2\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] = R^2$$

Movimiento circular uniforme

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(\mathrm{R}\cos(\omega t), \mathrm{R}\sin(\omega t)\big)$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\big(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)\big)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\big(\cos(\omega t), \sin(\omega t)\big)$$

Movimiento circular uniforme

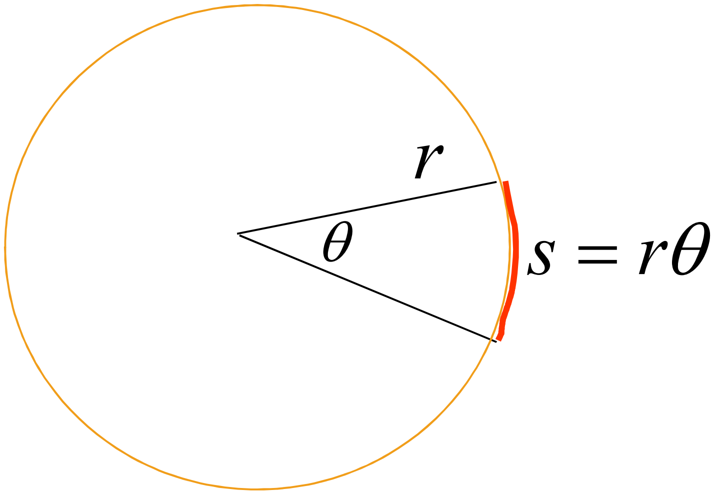
$$\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right) = \left(\mathrm{R}\cos(\omega t), \mathrm{R}\sin(\omega t)\right)$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\left(-\sin(\omega t), \cos(\omega t)\right)$$

$$\vec{a} = -R\omega^2\left(\cos(\omega t), \sin(\omega t)\right)$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

Relación entre las cantidades angulares y las cantidades lineales



$$\boxed{s = r\theta \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(r\theta\right)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

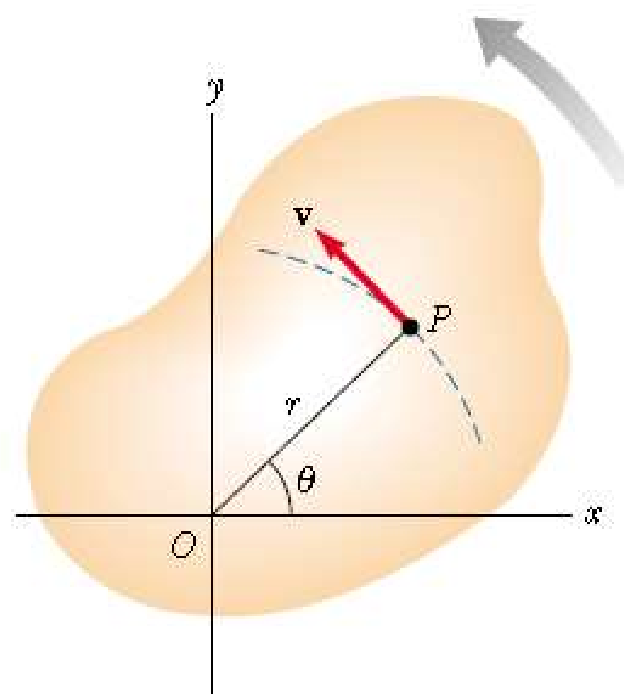
así que

$$v_{\text{Tangencial}} = r\omega$$

Relación entre las cantidades angulares y las cantidades lineales

$$\boxed{v_{\text{Tangencial}} = r\omega}$$

Aún cuando todo punto en el objeto rígido tiene la misma velocidad angular, no todos los puntos tienen la misma velocidad lineal (tangencial), ya que no todos los puntos están a la misma distancia *r* del eje de giro.



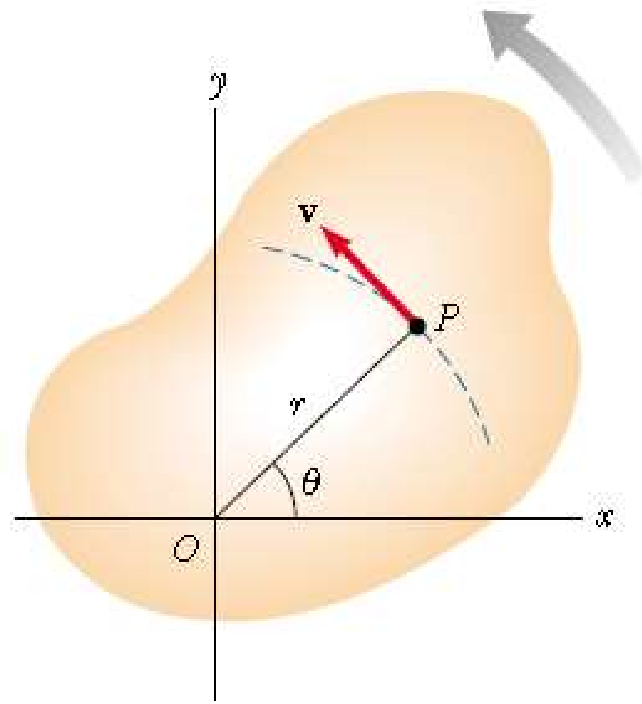
Relación entre las cantidades angulares y las cantidades lineales

$$v_{\text{Tang}} = r\omega$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

Por lo tanto,

$$a_{\text{Tangencial}} = r\alpha$$

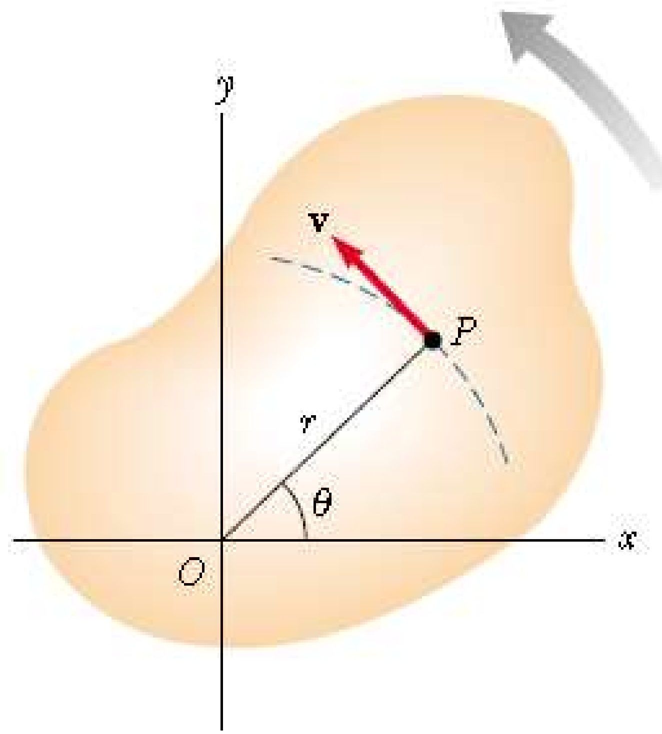


Relación entre las cantidades angulares y las cantidades lineales

$$s = r\theta$$

$$v_{\text{Tang}} = r\omega$$

$$a_{\text{Tang}} = r\alpha$$

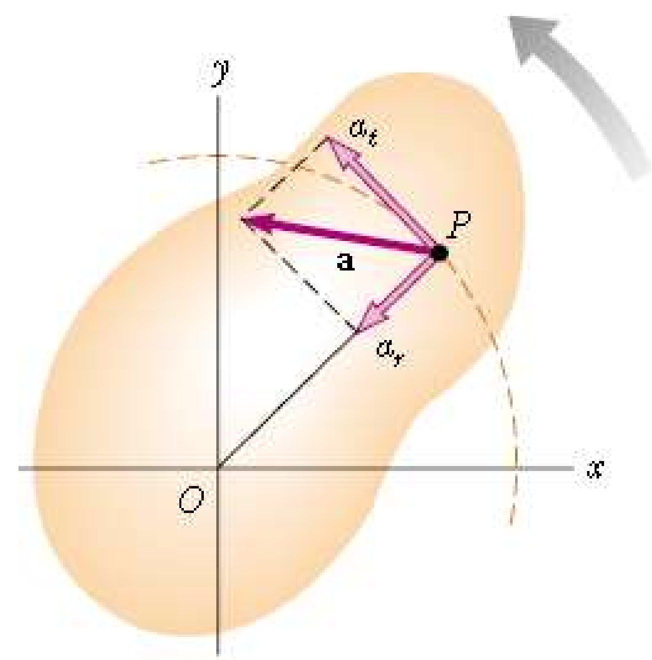


Aceleración centrípeta o radial

Un punto rotando en una trayectoria circular sufre una aceleración centrípeta o radial $\vec{a}_r$, cuya magnitud es

$$\left|\vec{a}_r\right| = \frac{v^2}{r}$$

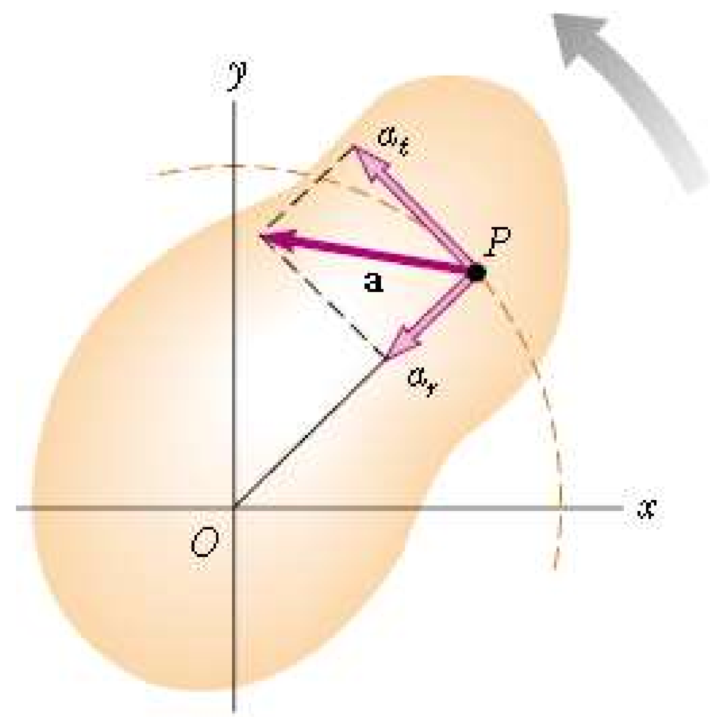
y que está dirigida hacia el centro de rotación.



Aceleración centrípeta o radial

Dado que $v = r\omega$ para un punto P en el objeto en rotación, tenemos

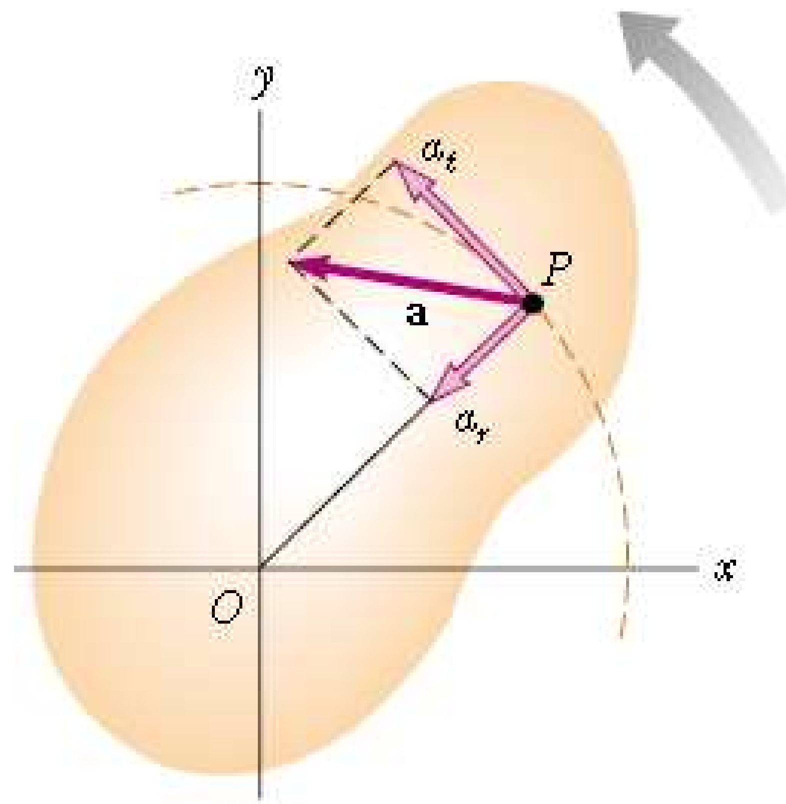
$$a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$



Aceleración centrípeta o radial

La aceleración vectorial lineal total de un punto *P* es

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$



Aceleración centrípeta o radial

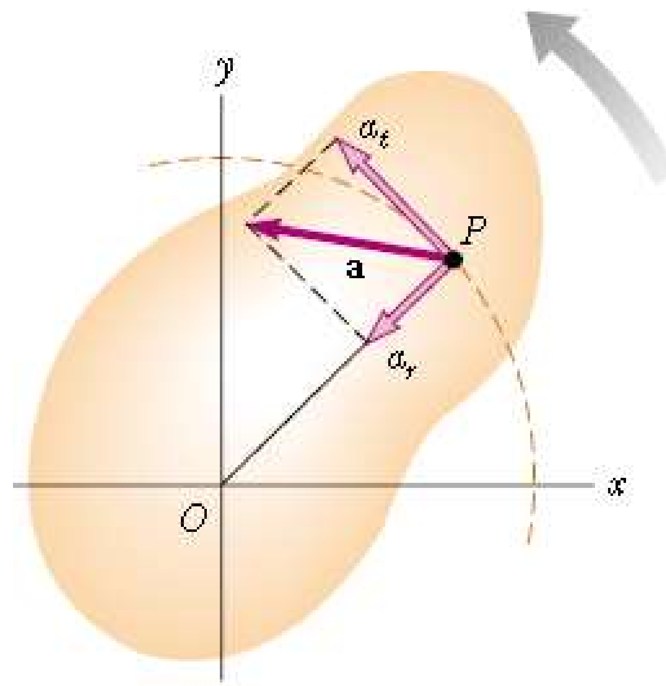
La aceleración vectorial lineal total de un punto P es $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$

Es claro que,

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left|\vec{a}_r\right|^2 + \left|\vec{a}_t\right|^2}$$

$$= \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4}$$

$$= r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$



Cuerpo girando visto desde una referencia distinta

giro con velocidad angular constante, por tanto
tan solo aceleracion radial y no tangencial

Velocidad Angular

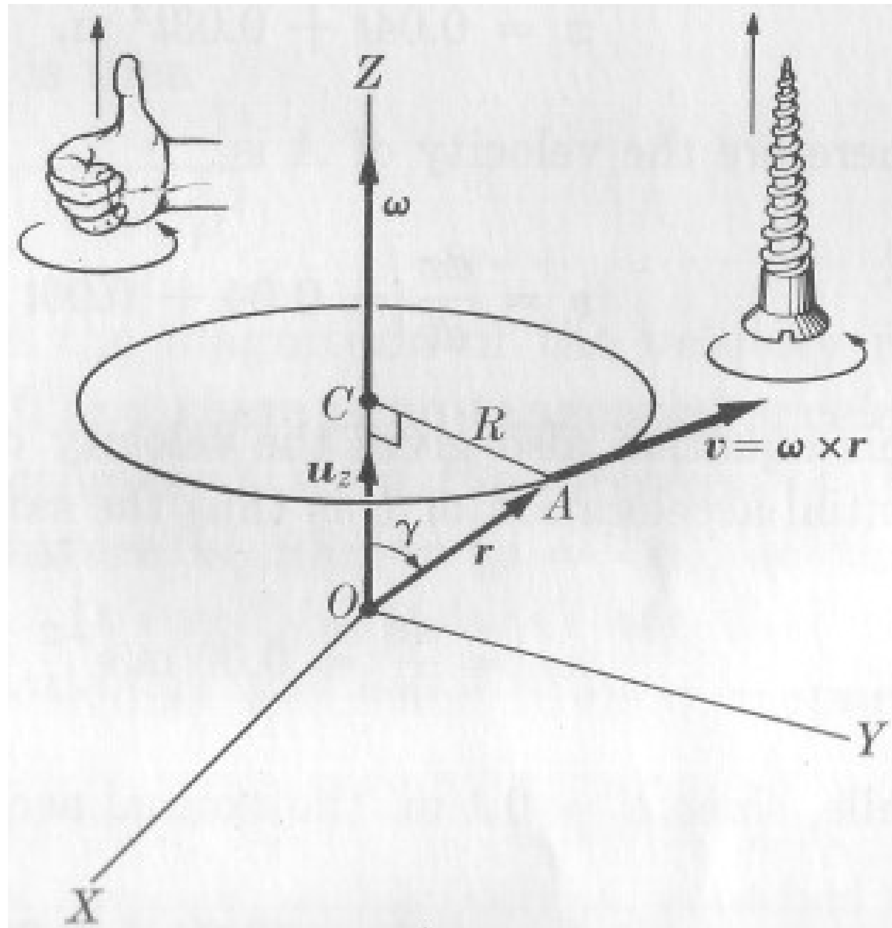
$$\mathrm{v} = \omega r sen\gamma$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$n \quad vueltas$$

$$P = \frac{t}{n}, \quad f = \frac{n}{t}$$

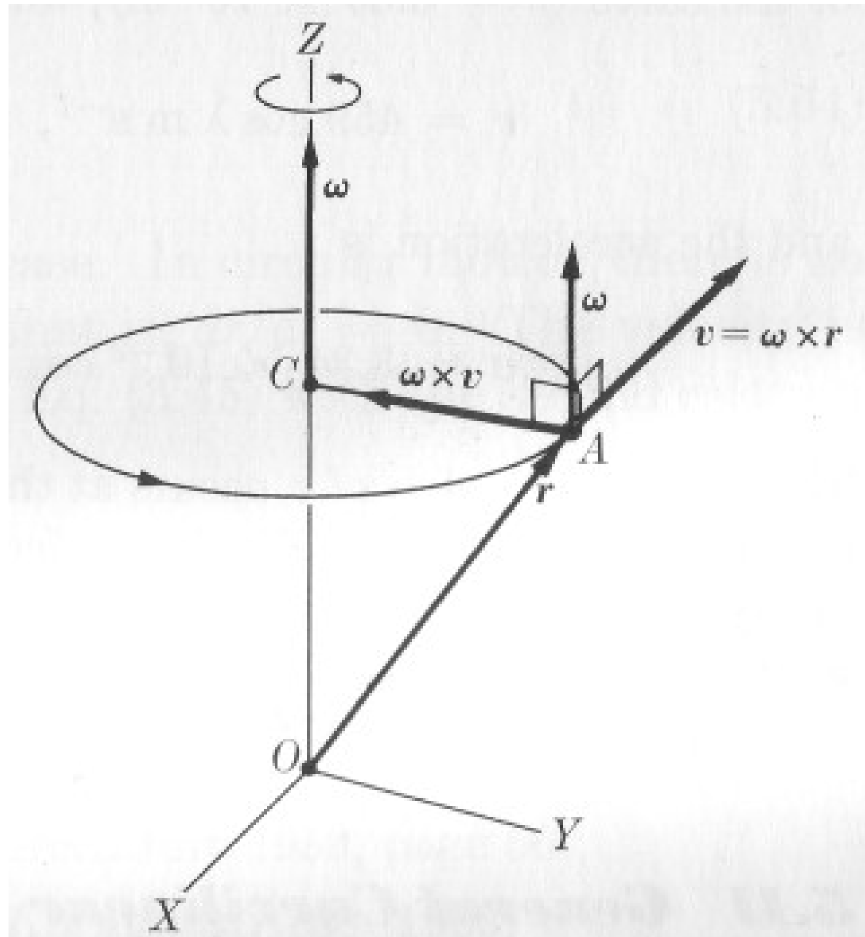
$$f = \frac{1}{P}$$

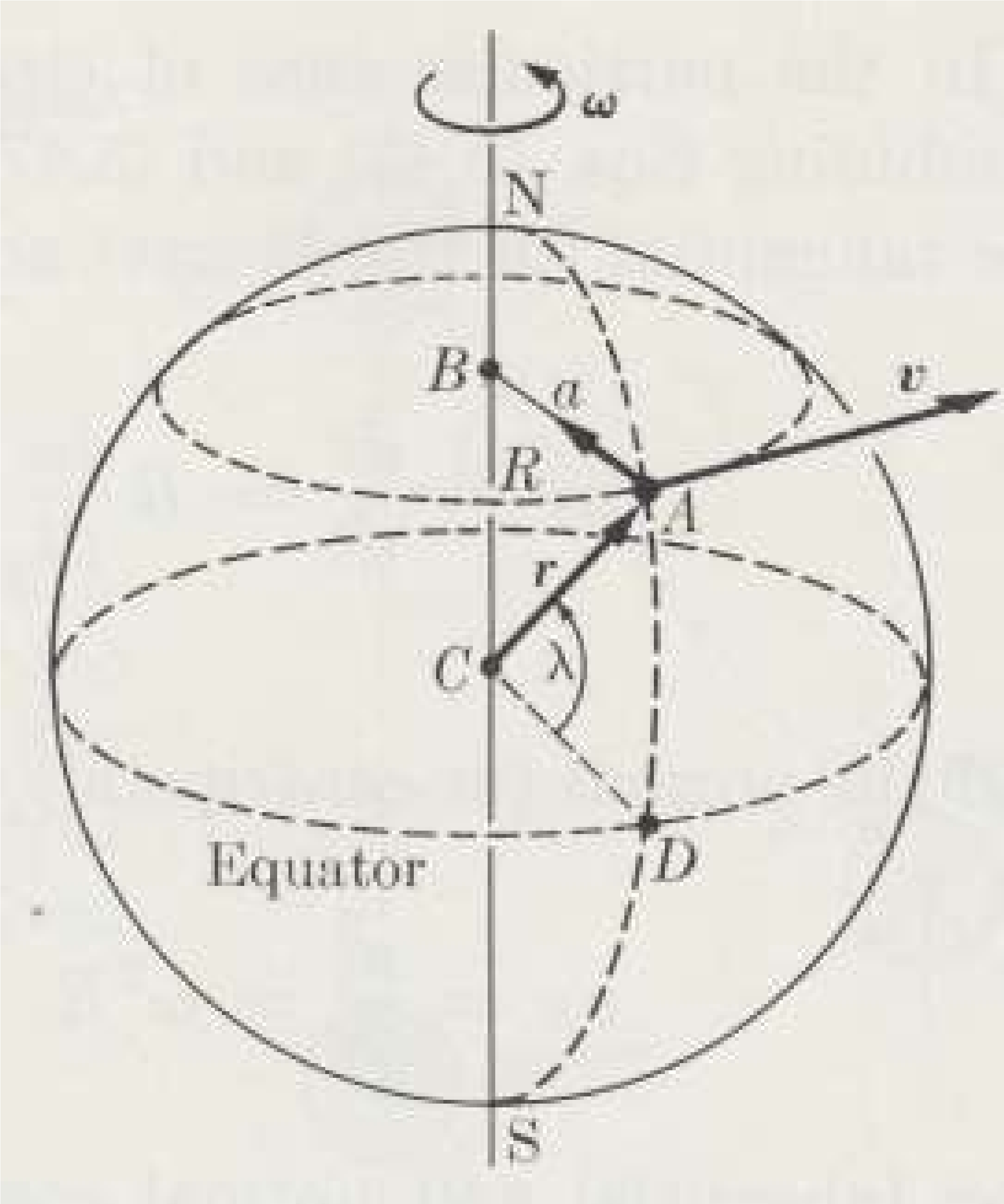


Aceleración Angular

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$





$$R = r\cos\lambda$$

$$\mathrm{v} = \omega R = \omega r\cos\lambda$$

$$a = \omega^2 R = \omega^2 r\cos\lambda$$

Estatica

- Ejemplos
    - Centro de masa

Equilibrio 2D

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots\ldots\ldots = \sum_{n=1}^{M} \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}R_x + \mathbf{j}R_y$$

$$R_x = \sum F_{nx} = \sum F_n \cos(\theta_n)$$

$$R_y = \sum F_{ny} = \sum F_n sen(\theta_n)$$

$$R = \sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$$

$$\tan(\theta) = R_x / R_y$$

Resumen

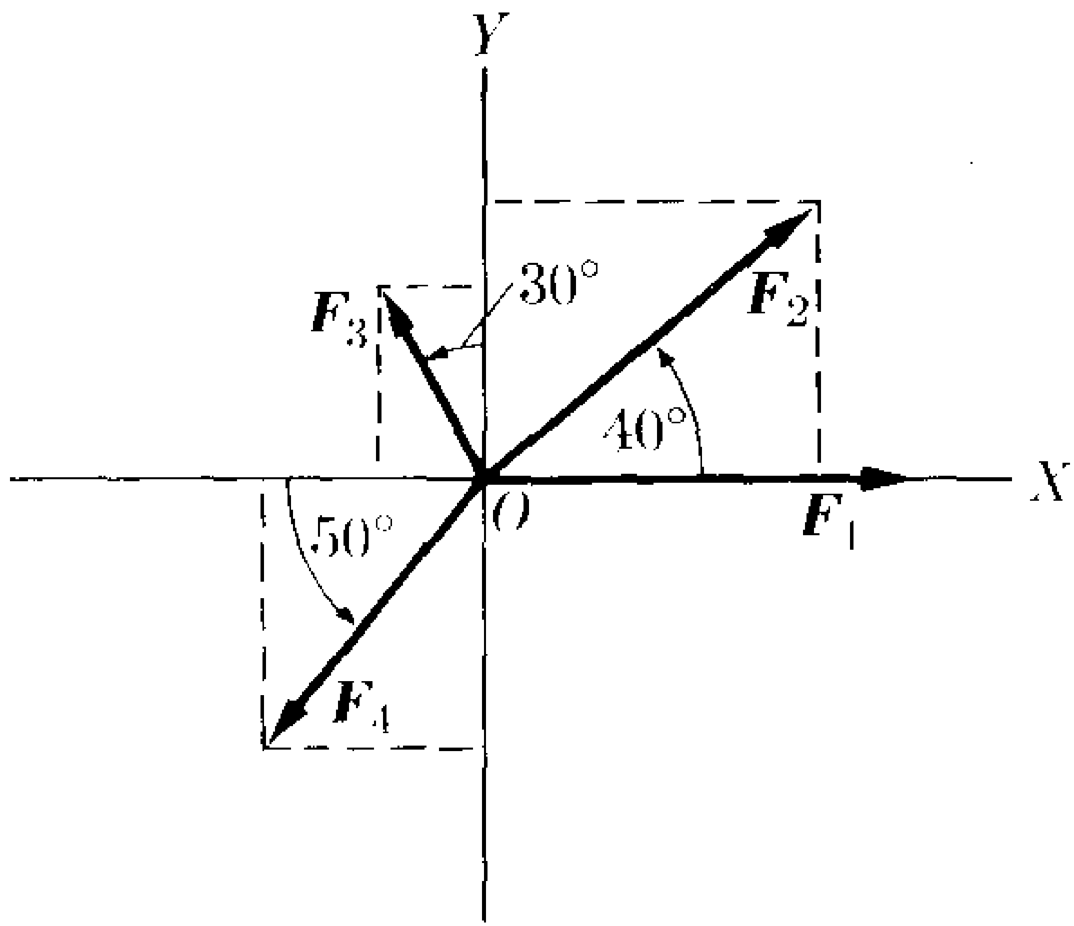
- Magnitud y dirección….dar componentes
- Componentes …..dar magnitud y dirección
- Saber plantear el problema

$$\mathbf{F}_1 = 1200N$$

$$\mathbf{F}_2 = 900N$$

$$\mathbf{F}_3 = 300N$$

$$\mathbf{F}_4 = 800N$$



$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}1200N$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{i}F_2 \cos 40 + \mathbf{j}F_2 sen 40$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{i}F_3 \cos 120 + \mathbf{j}F_3 sen 120$$

$$\mathbf{F}_4 = \mathbf{i}F_4 \cos 230 + \mathbf{j}F_3 sen 230$$

$$Rx = 1200 + 689.4 - 150 - 514.2 = 1225.2N$$

$$Ry = 0 + 578.5 + 259.8 - 612.8 = 225.5N$$

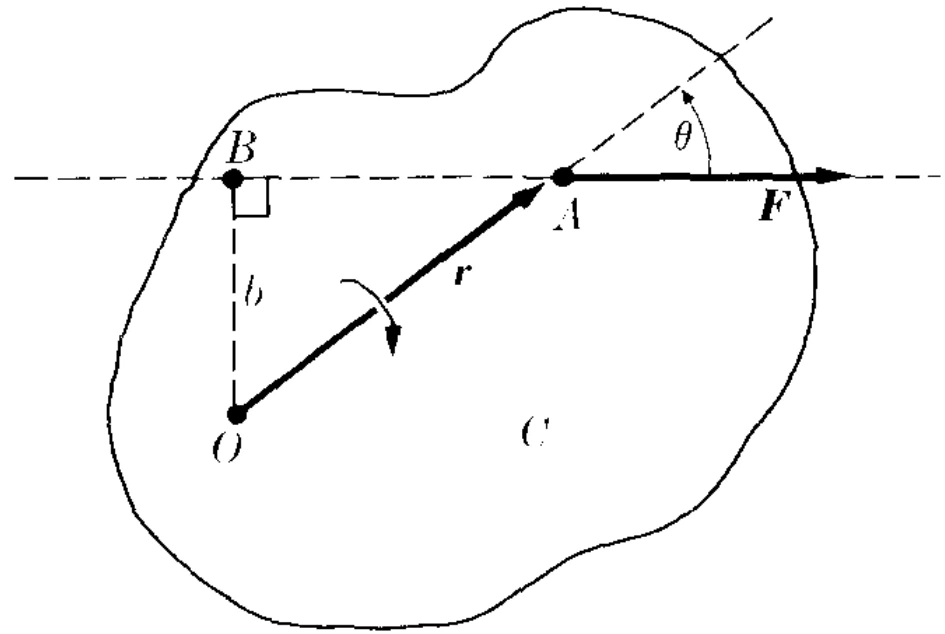
$$\mathbf{R} = \mathbf{i}1225.2 + \mathbf{j}225.5N$$

$$R = 1245.4N$$

$$\theta = 10.4^o$$

Torca o Par

- Torquímetro
- Brazo de Palanca b
- Experiencia



- Note que b = r senΘ por tanto τ = F r senΘ
- Y así τ = **r** x **F**

Torca

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i}(yFz - zFy) - \mathbf{j}(xFz - zFx) + \mathbf{k}(xFy - yFx)$$

Si **r** y **F** están en el plano XY

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{k}(xFy - yFx)$$

$$\tau = xFy - yFx$$

- El brazo de palanca es $b = r$ sen 20º y por tanto la torca es $t = rb = 0.924$ Nm. ¿Hacia a dónde va la torca?
- $x = r \cos 50º = 0.289$ m, $y = r$ sen $50º = 0.345$m

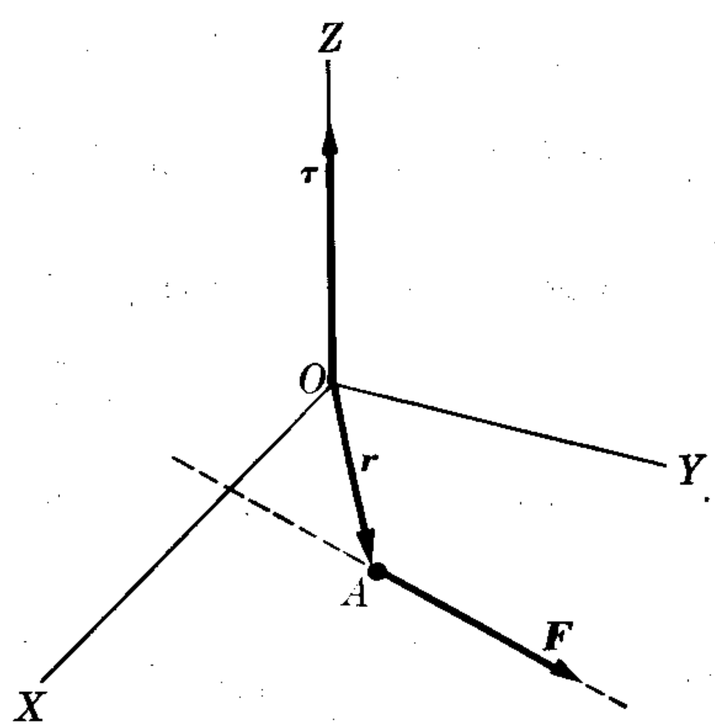
$F_x = F \cos 30º = 5.196$N, $F_y = F$ sen $30º = 3.0$N.

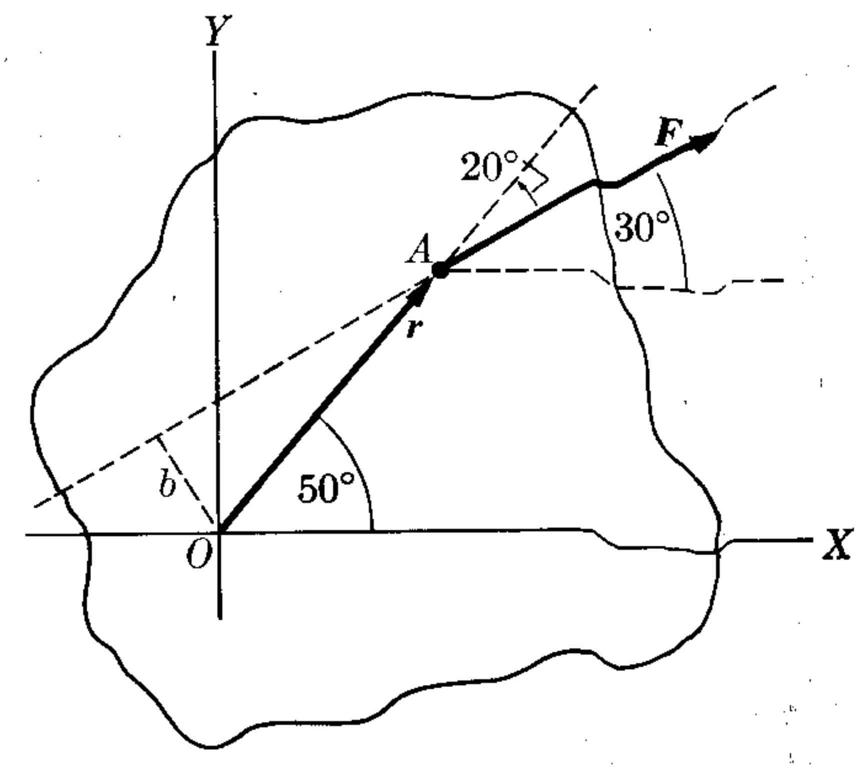
Así

$\tau = xF_y - y F_x = 0.867 - 1.792 = -0.925$ Nm

Por tanto $-0.925 = 3x - 5.196 y$

- Determine la torca aplicada al cuerpo de la figura donde F es 6 N haciendo un ángulo de 30º con el eje X y r está a una distancia de 45 cm con un ángulo de 50º con el eje X. Encuentre la ecuación de la línea de acción de la fuerza.



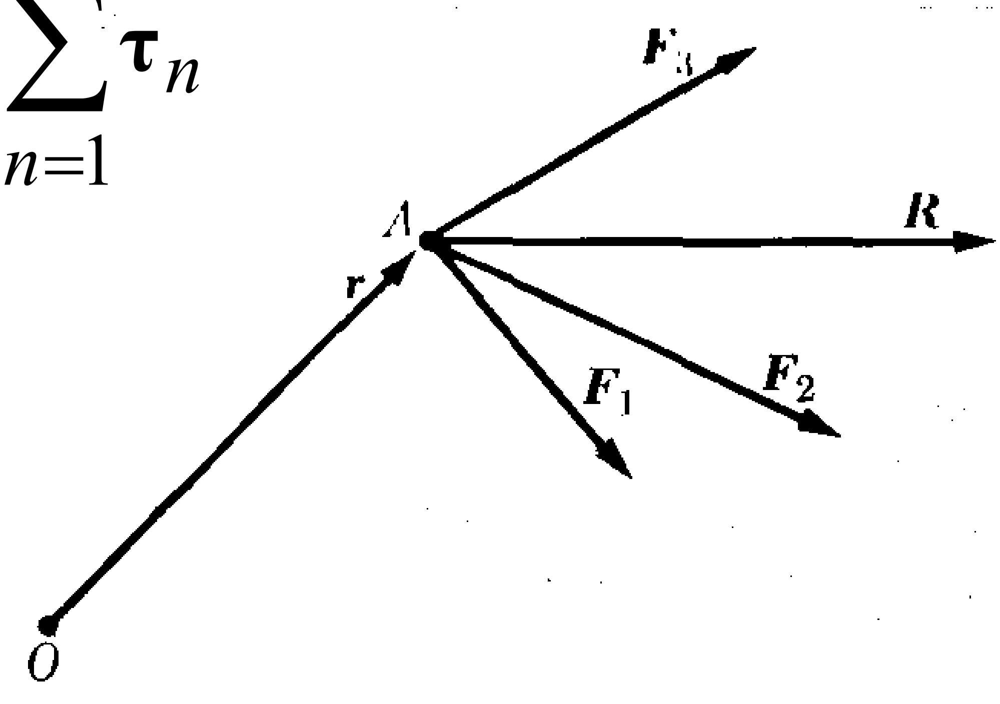


Fuerzas Concurrentes

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots\ldots..)$$

$$= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \ldots\ldots..$$

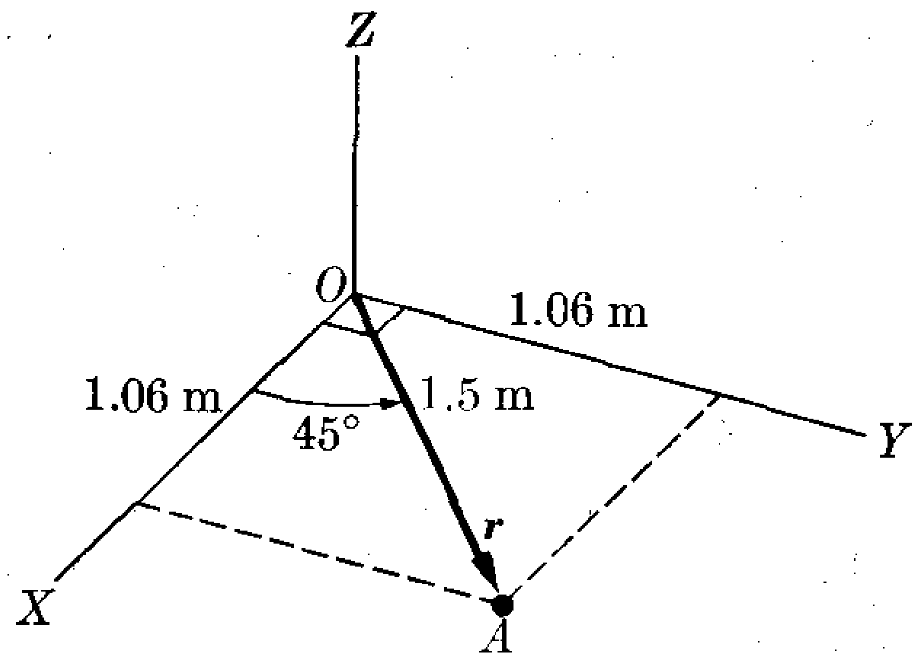
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 = \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{M} \boldsymbol{\tau}_n$$



Composición Fuerzas

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots\ldots = \sum_{n=0}^{M-1} \mathbf{F}_n$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 = \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{M} \boldsymbol{\tau}_n$$



$$r = 1.5m, 45^{o} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{i}(1.06) + \mathbf{j}(1.06)m$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}(6) + \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(0)N$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{i}(6) - \mathbf{j}(7) + \mathbf{k}(14)N$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{i}(5) + \mathbf{j}(0) - \mathbf{k}(3)N$$

$$r = 1.5m, 45^o \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{i}(1.06) + \mathbf{j}(1.06)m$$

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}(6) + \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(0)N$$

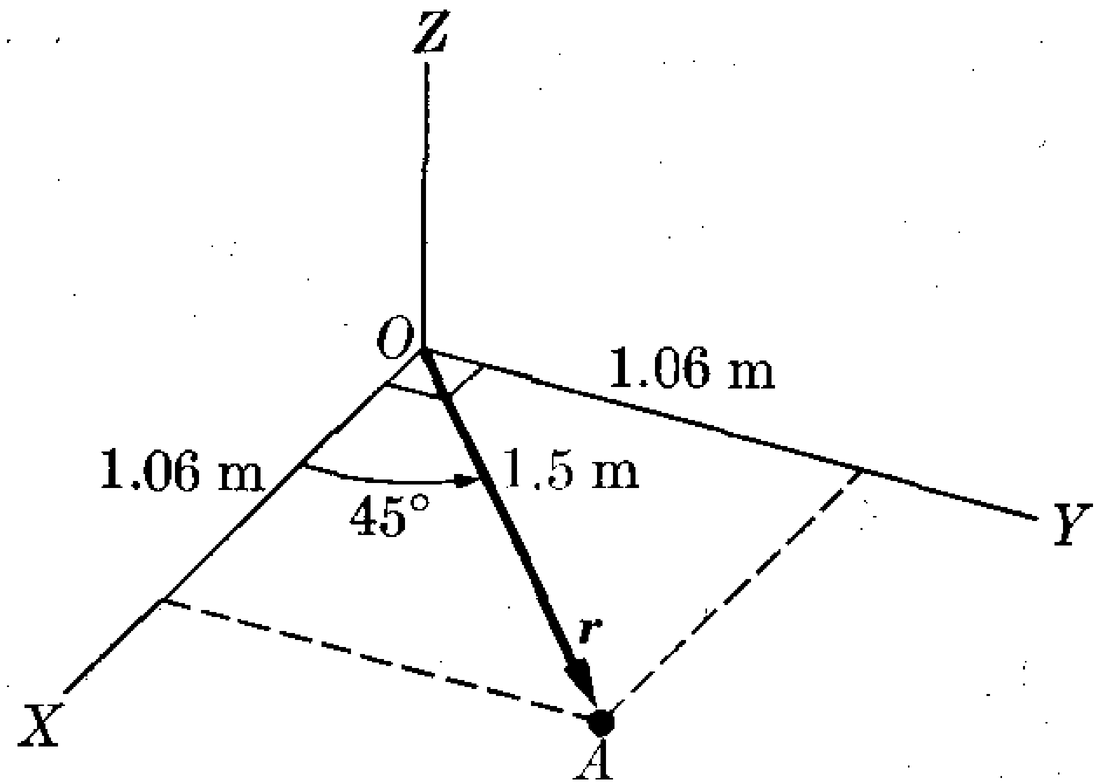
$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{i}(6) - \mathbf{j}(7) + \mathbf{k}(14)N$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{i}(5) + \mathbf{j}(0) - \mathbf{k}(3)N$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i}(6+6+5) + \mathbf{j}(0-7+0) + \mathbf{k}(0+14-3)N$$

$$= \mathbf{i}(17) - \mathbf{j}(7) + \mathbf{k}(11)N$$

$$\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{R} = \mathbf{i}(11.66) - \mathbf{j}(11.66) - \mathbf{k}(25.44)Nm$$



$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{i}(0) + \mathbf{j}(0) - \mathbf{k}(6.36)Nm$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{i}(14.84) - \mathbf{j}(14.84) - \mathbf{k}(13.78)Nm$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 = -\mathbf{i}(3.18) + \mathbf{j}(3.18) - \mathbf{k}(5.30)Nm$$

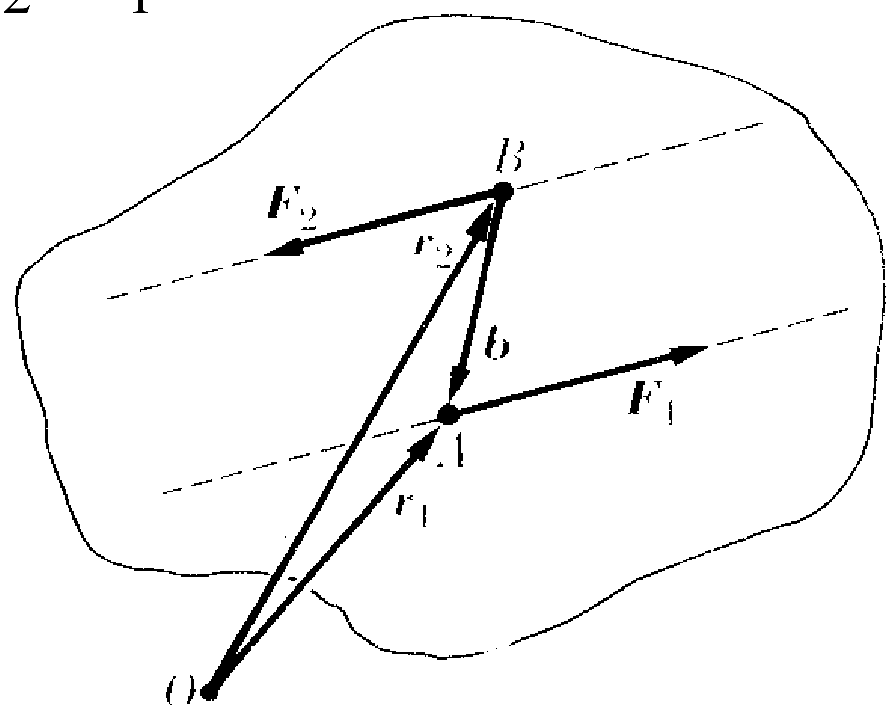
Composición de Fuerzas

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 =$$

$$= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1$$

$$= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_1 = b \times \mathbf{F}_1$$



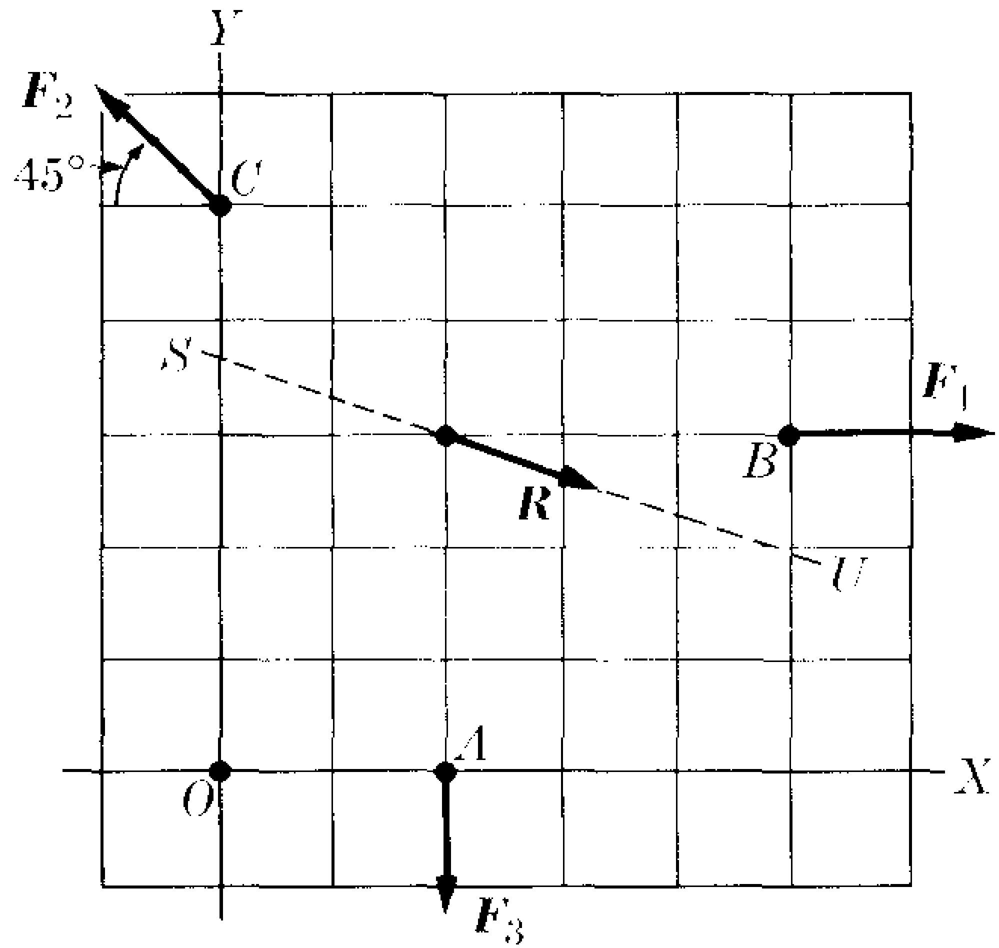
$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{i}(10)N$$

F_1=10N, F_2=8 N, F_3=7N

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{i}(F_2 \cos 135^o) + \mathbf{j}(F_2 sen 135^o)$$

$$= \mathbf{i}(-5.66) + \mathbf{j}(5.66)N$$

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{j}(7)N$$



$$\mathbf{R} = \mathbf{i}(4.34) + \mathbf{j}(-1.34)N$$

$$\therefore R = 4.54N, \theta = -17.1^o$$

$$\tau_1 = -(0.3m)(10N) = -3.0Nm$$

$$\tau_2 = -(0.5m)(-5.66N) = 2.83Nm$$

$$\tau_3 = (0.2m)(-7N) = -1.40Nm$$

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = -1.57Nm$$

$$x(-1.34) - y(4.34) = -1.57$$

$$y = -0.30x + 0.35$$

$$m = \tan gente$$

A(0.2m,0) B(0.5,0.3) C(0,0.5)

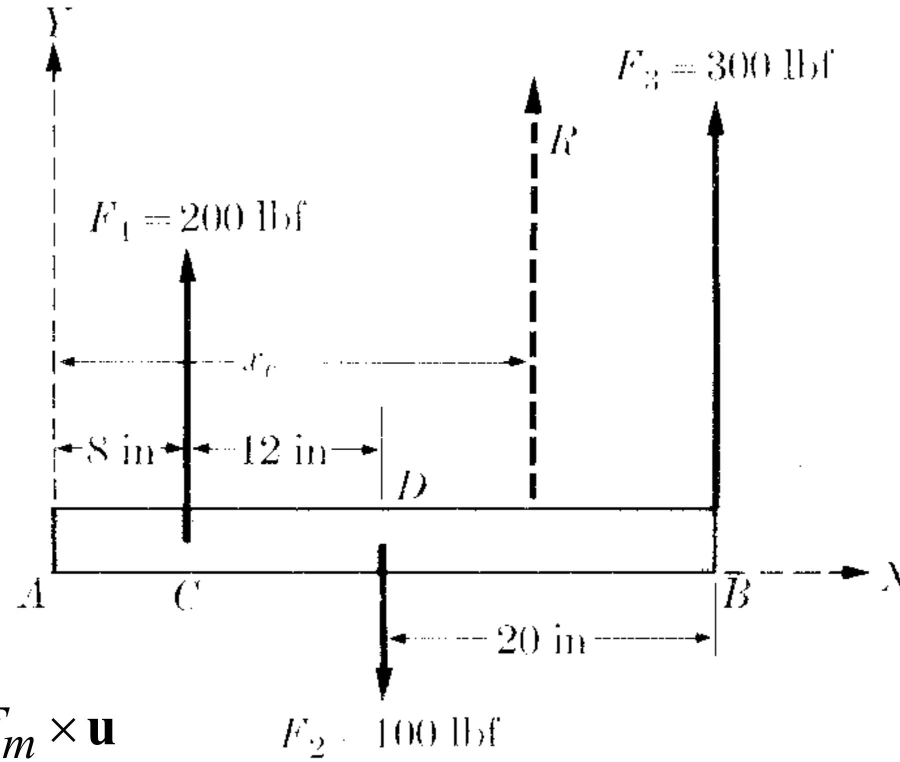
Fuerzas Paralelas

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{u}F_m$$

$$\mathbf{R} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{F}_m = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{u}F_m = \mathbf{u}\sum_{m=1}^{M} F_m$$

$$R = \sum_{m=1}^{M} F_m$$

$$\tau = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m \times \mathbf{F}_m = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m \times \mathbf{u}F_m = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m F_m \times \mathbf{u}$$



$$R = \sum_{m=1}^{M} F_m$$

$$en \;\; \mathbf{r}_c$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_c \times \mathbf{R}$$

$$\tau = \mathbf{r}_c \times \mathbf{u} \sum_{m=1}^{M} F_m = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m F_m \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{r}_c \sum_{m=1}^{M} Fm \times \mathbf{u} = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m F_m \times \mathbf{u}$$

$$\mathbf{r}_c \sum_{m=1}^{M} Fm = \sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m F_m$$

$$\therefore$$

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m F_m}{\sum_{m=1}^{M} Fm}$$

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{m=1}^{M} \mathbf{r}_m F_m}{\sum_{m=1}^{M} Fm}$$

$$x_c = \frac{\sum_{m=1}^{M} x_m F_m}{\sum_{m=1}^{M} Fm}$$

$$y_c = \frac{\sum_{m=1}^{M} y_m F_m}{\sum_{m=1}^{M} Fm}$$

$$z_c = \frac{\sum_{m=1}^{M} z_m F_m}{\sum_{m=1}^{M} Fm}$$

Fuerzas Paralelas

$$R = \sum_{m=1}^{M} F_m = F_1 - F_2 + F_3 = 400N$$

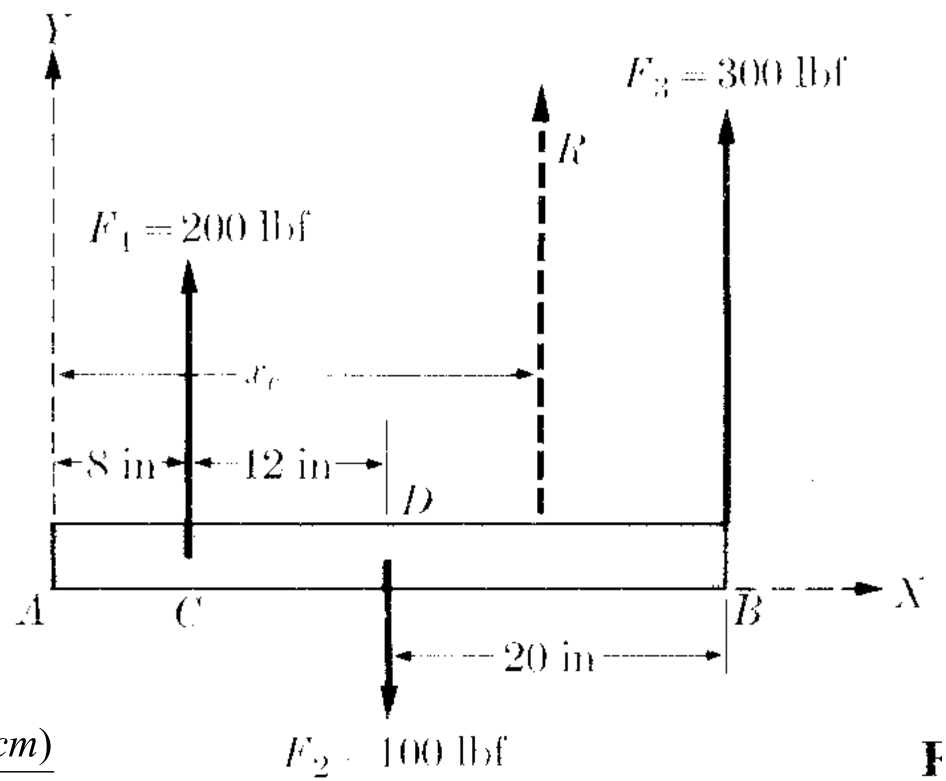
$$x_c = \frac{\sum_{m=1}^{M} x_m F_m}{\sum_{m=1}^{M} F_m}$$

$$= \frac{(200N)(8cm) + (-100N)(20cm) + (300N)(40cm)}{400N}$$

$$= 29cm$$

$$xc = \frac{(200N)(-12cm) + (-100N)(0cm) + (300N)(20cm)}{400N}$$

$$= 9cm$$



Centro de masa

$$\mathbf{W} = m\mathbf{g}$$

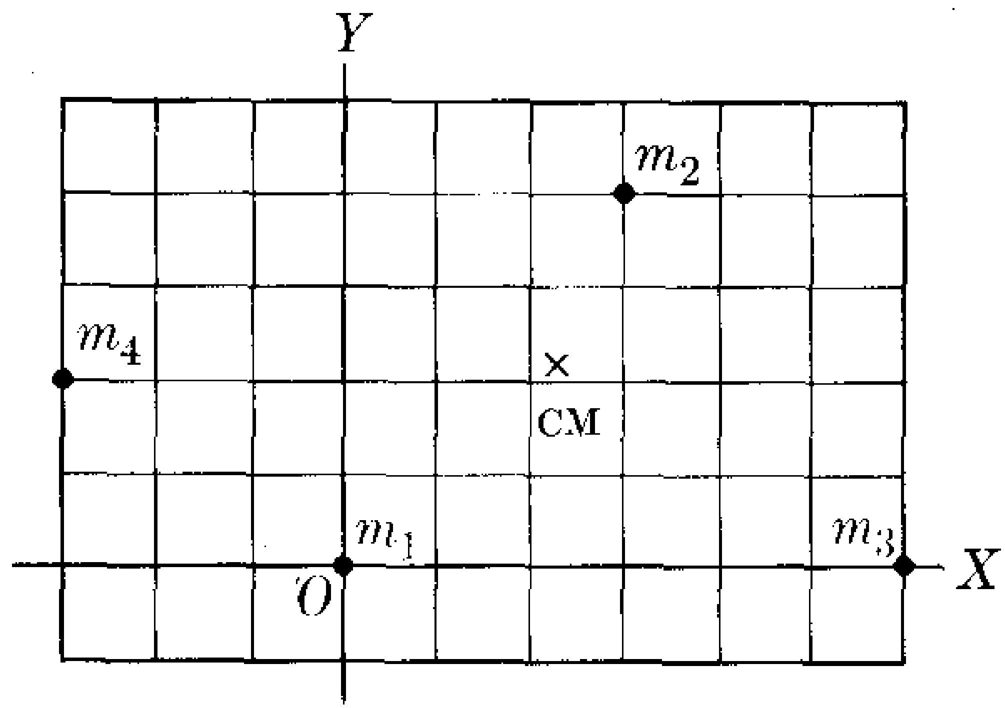
$$W = \sum_{l=1}^{n} m_l g$$

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n m_n g}{\sum_{n=1}^{N} m_n g} = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n m_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n}$$

$$x_c = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n m_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} \qquad y_c = \frac{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{r}_n m_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} \qquad z_c = \frac{\sum_{n=1}^{N} z_n m_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n}$$

Ejemplo

- Encuentre el centro de masa de las partículas de la figura . Ahí con un grid de 5 cm, las masas son: m_1=5 kg, m_2=30 kg m_3=20 kg y m_4=15 kg.



solución

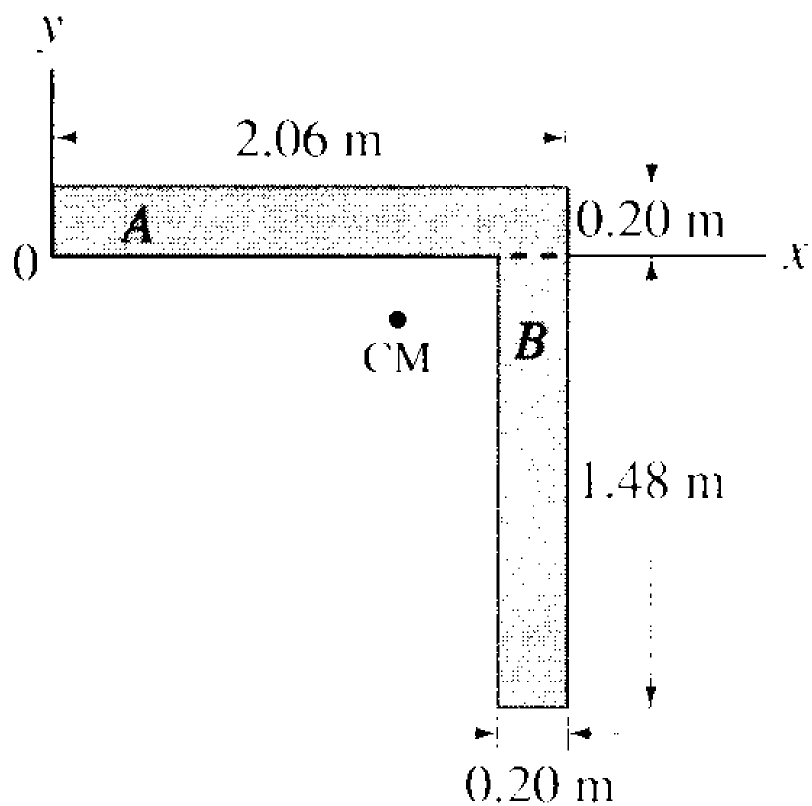
$$m = \sum_n m_n = 5kg + 30kg + 20kg + 15kg = 70kg$$

$$x_c = \frac{5(0) + 30(15) + 20(30) + 15(-15)}{70} = 11.8cm$$

$$y_c = \frac{5(0) + 30(20) + 20(0) + 15(10)}{70} = 10.7cm$$

Observaciones

FIGURA 9–29 Ejemplo 9–15. Este objeto en forma de L tiene espesor t (no mostrado en el diagrama).

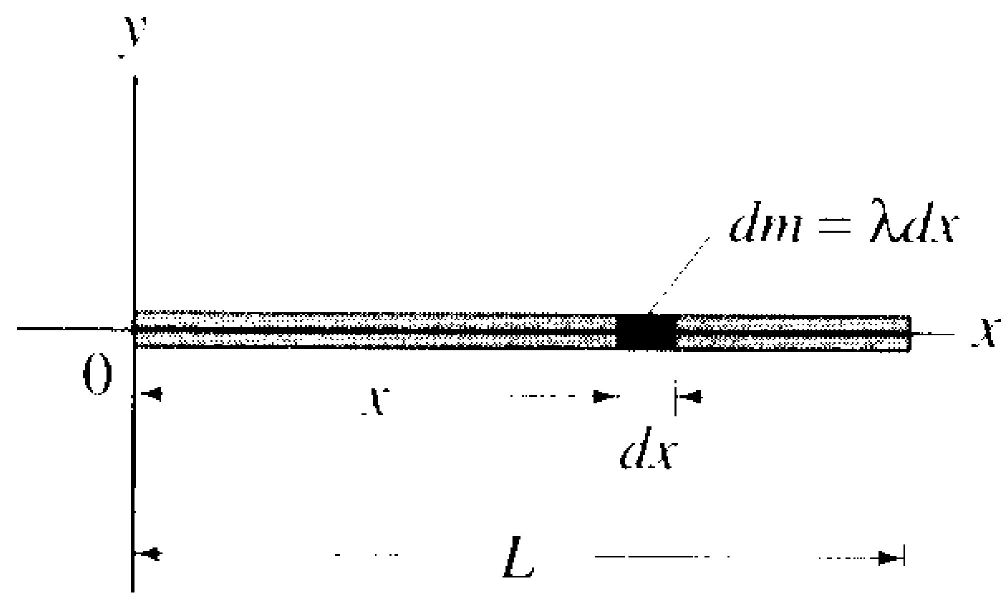


$$dm = \delta \quad dV \qquad \lambda, \sigma, \rho$$

$$x_c = \frac{\int_{\Re} x\delta dV}{\int_{\Re} \delta dV} \qquad y_c = \frac{\int_{\Re} y\delta dV}{\int_{\Re} \delta dV} \qquad z_c = \frac{\int_{\Re} y\delta dV}{\int_{\Re} \delta dV}$$

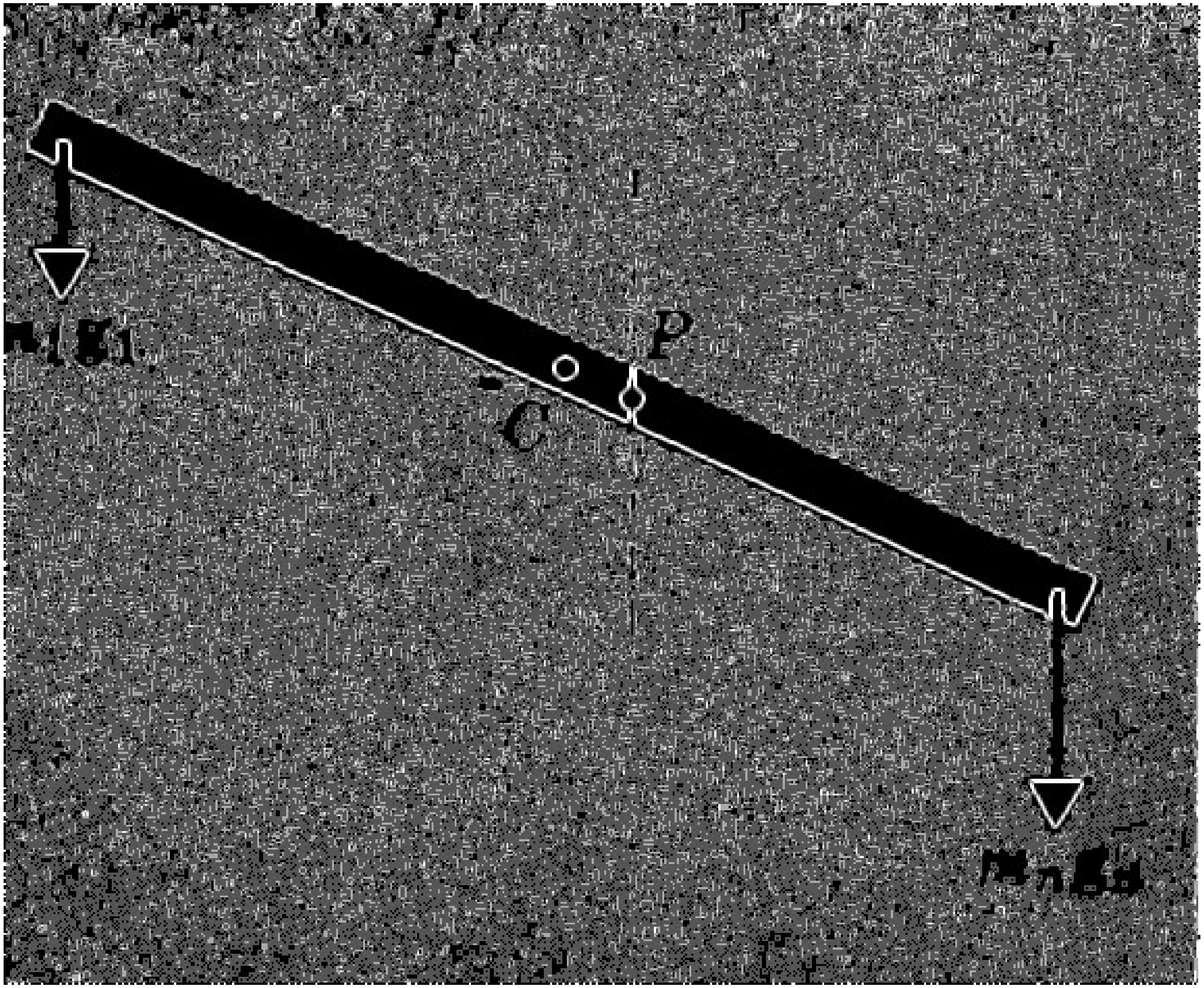
$$x_c = \frac{\int_{\Re} x dV}{\int_{\Re} dV} = \frac{\int_{\Re} x dV}{V}$$

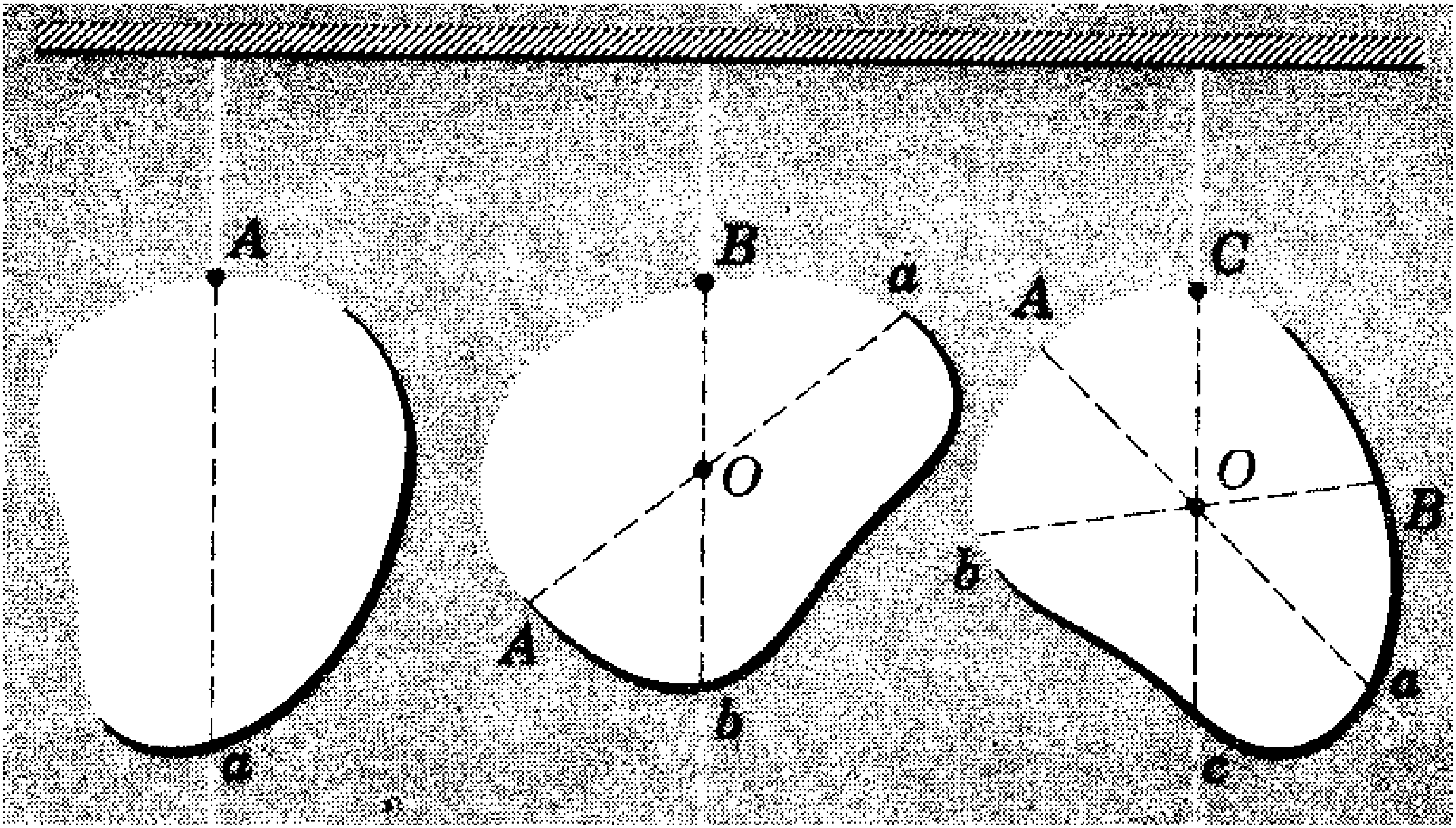
FIGURA 9–27 Ejemplo 9–14.



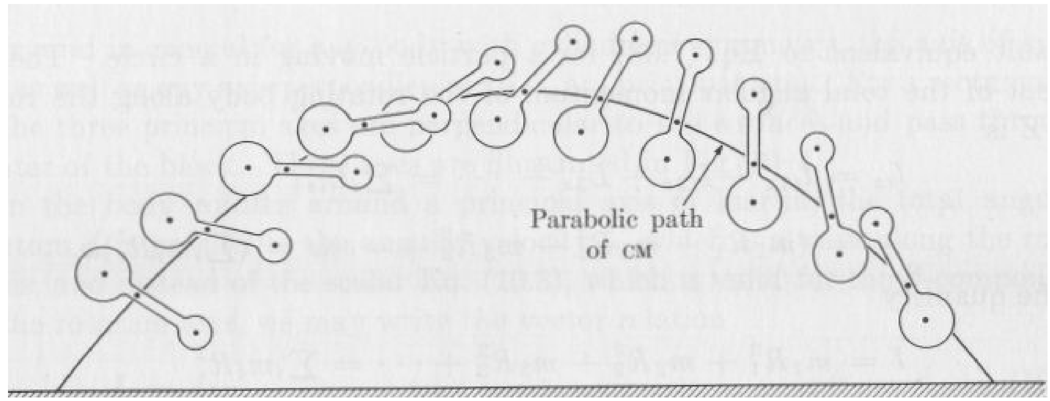
Centro de gravedad

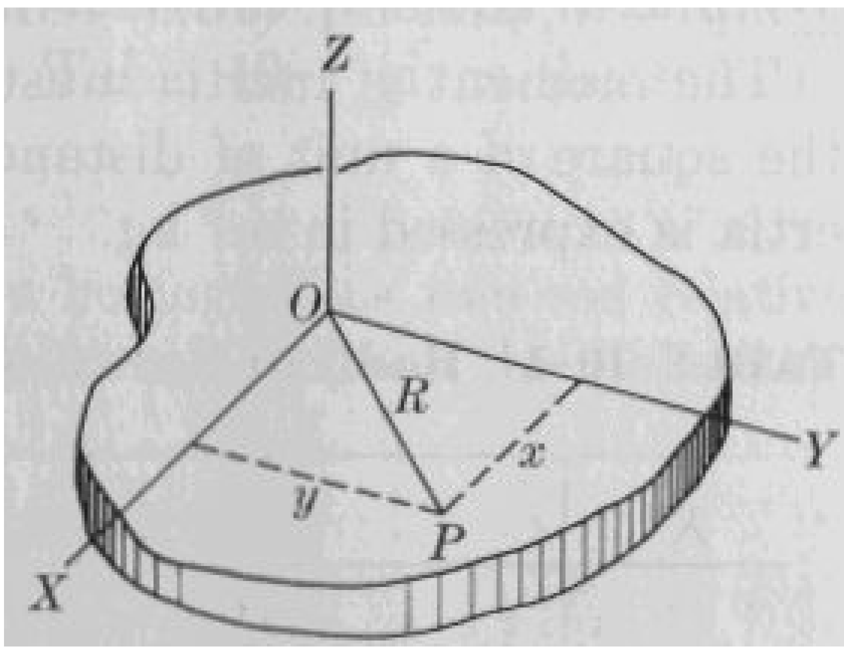
- Se dedujo el centro de masa a partir del centro de gravedad y en general son iguales para cuerpos pequeños pues el campo gravitacional g se considera uniforme
- Usamos lo anterior para encontrar experimentalmente el centro de masa de un cuerpo irregular


P
C


A
a
B
a
O
A
b
C
A
O
B
b
a
c

Cuerpo Rígido





Equilibrio de un Cuerpo Rígido

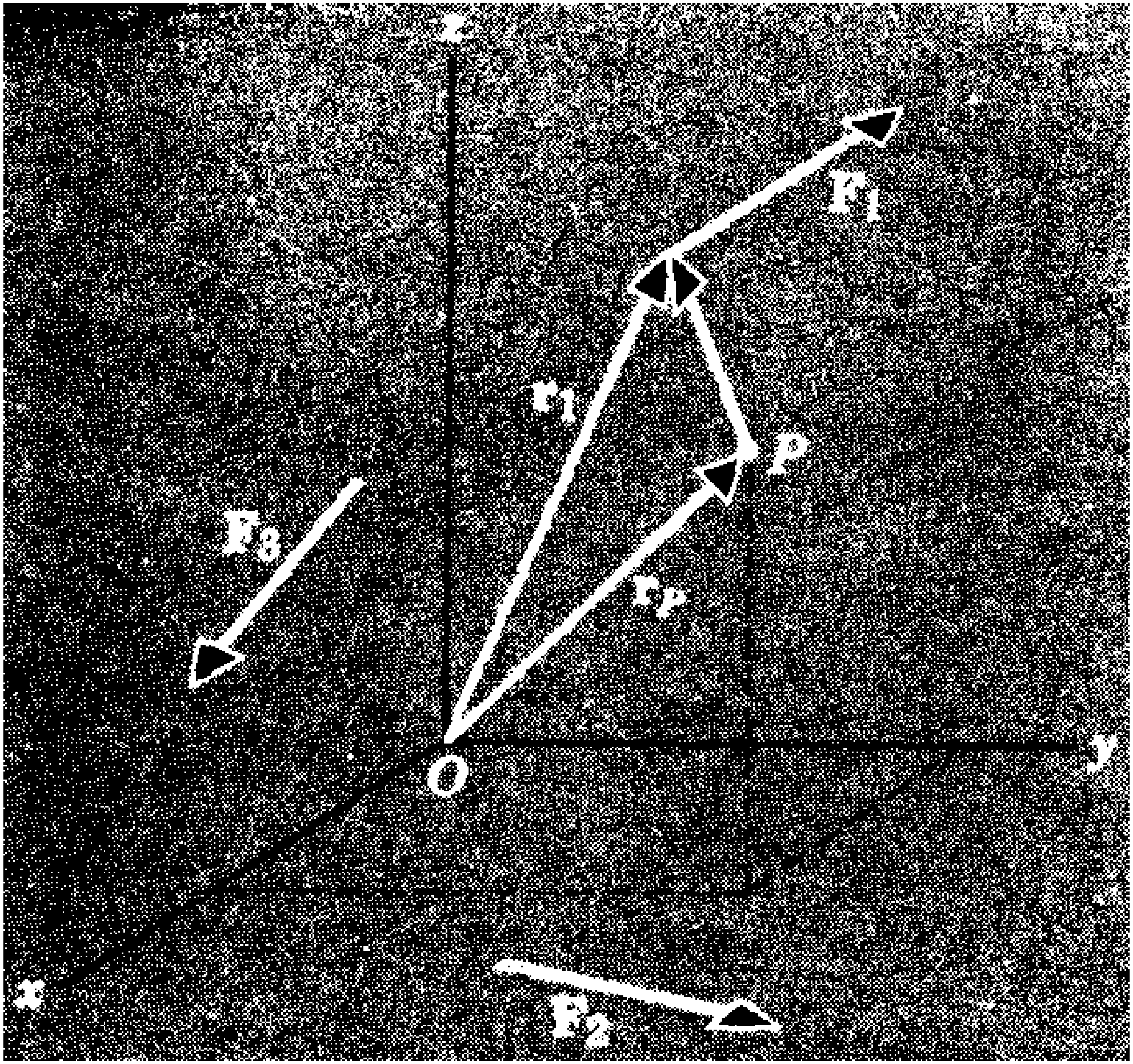
$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = 0$$

$$\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum F_{iz} = 0,$$

$$\sum \tau_{ix} = 0, \sum \tau_{iy} = 0, \sum \tau_{iz} = 0.$$

Equilibrio Estático

- Seis ecuaciones => seis grados de libertad
- Cuando hay equilibrio translacional y equilibrio rotacional
  - Torca o momento de rotación se define para cualquier origen de coordenadas.
  - Sin embargo en equilibrio rotacional la torca es cero para cualquier origen, i.e. las componentes de la torca sobre tres ejes cualesquiera, mutuamente perpendiculares debe ser cero.


z
F_1
r_1
P
F_3
r_P
O
y
x
F_2

En general

$$\boldsymbol{\tau}_o = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots\dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n$$

Torca con respecto a p

$$\boldsymbol{\tau}_p = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_2 + \dots\dots + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_n$$

Por propiedades de los vectores

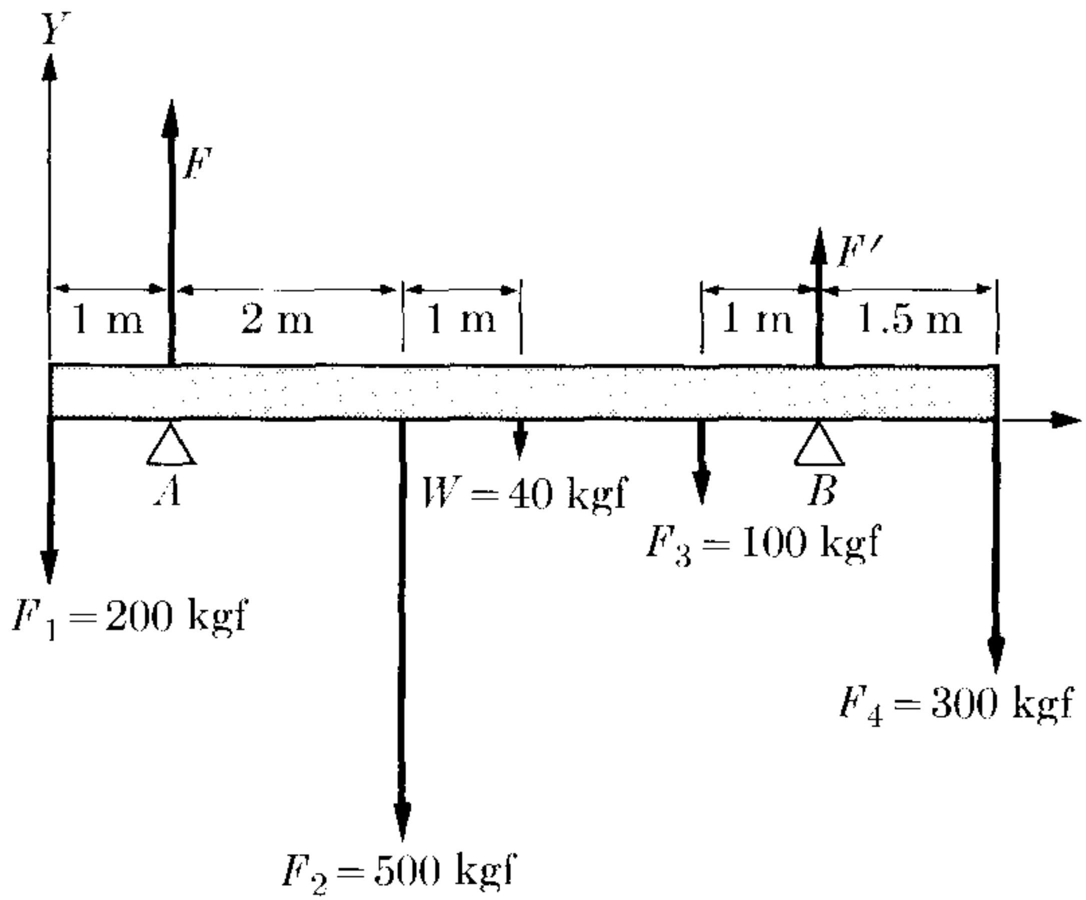
$$\boldsymbol{\tau}_p = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots\dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n] - \\ [\mathbf{r}_p \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots\dots + \mathbf{F}_n)]$$

Por equilibrio translacional

$$\boldsymbol{\tau}_o = \boldsymbol{\tau}_p$$

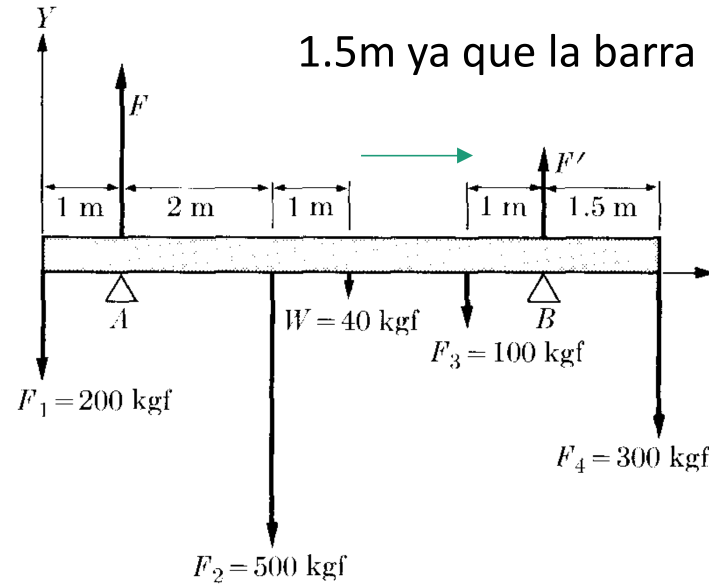
Ejemplo

- La barra de la figura descansa en equilibrio entre los puntos A y B bajo la acción de las fuerzas mostradas. Encuentre las fuerzas que se ejercen en los puntos A y B. La barra pesa 40 N y su longitud es de 8m.



solución

1.5m ya que la barra es de 8



$$\sum F_i = F + F' - 200 - 500 - 40 - 100 - 300 = 0$$

$$\therefore$$

$$F + F' = 1140N$$

Calculando las torcas relativas al punto A pues asi la torca de F es cero,

$$\sum \tau_i = (-200)(-1) + F(0) + (-500)(2) + (-40)(3) + (-100)(4.5) + F'(5.5) + (-300)(7) = 0$$

$$\therefore$$

$$F' = 132.7N$$

$$asi$$

$$F = 1140 - 132.7 = 1007.3N$$

$$\sum \; = 200 + 0 - 1000 - 120 - 450 + F'(5.5) - 2100 = F'(5.5) - 3470$$

$$F' \approx 630.1$$

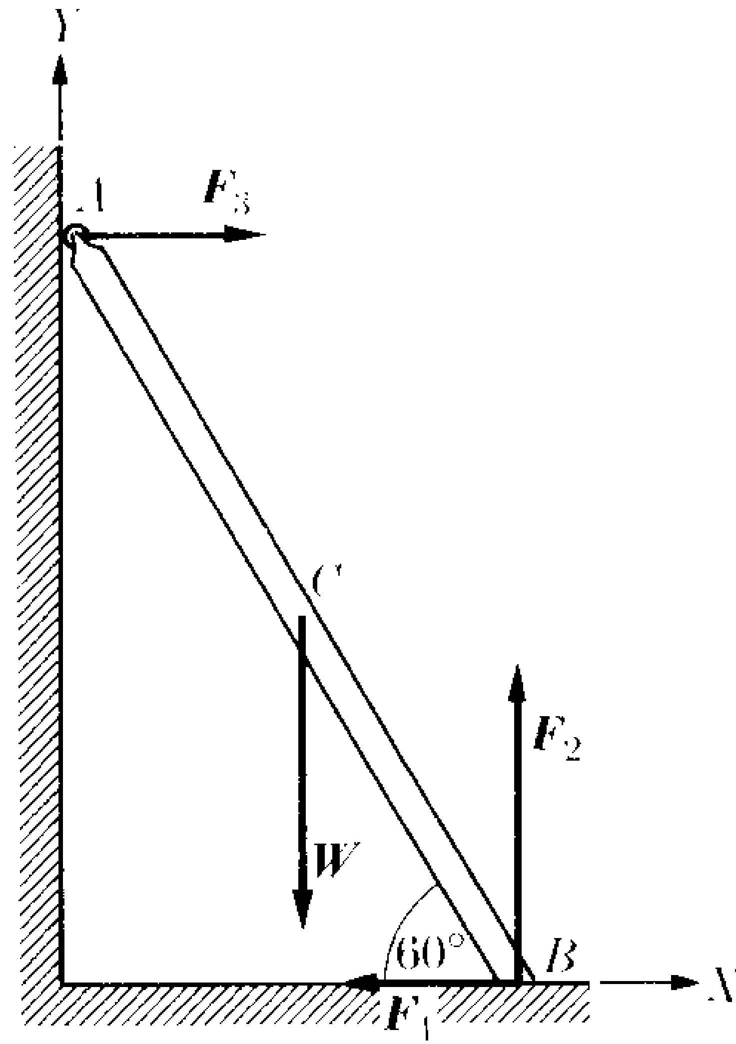
$$F \simeq 1140 - (630.1) = 509.01$$

Procedimiento general

- Limite imaginario en torno al sistema bajo consideración
- Trazamos vectores que representen la magnitud, la dirección y punto de aplicación de las fuerzas externas (gravedad, cuerdas, varillas, vigas, barras, etc.)
- Escogemos un marco de referencia *conveniente* para simplificar calculos
- Pueden ser diferentes marcos de referencia para equilibrio translacional y rotacional.

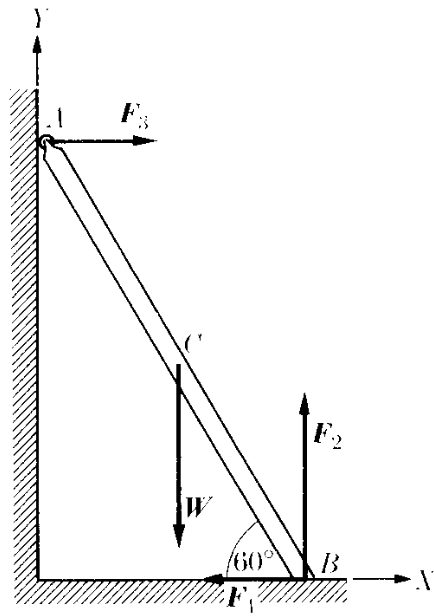
Ejemplo

- Una escalera que pesa 40 N descansa contra un muro formando un ángulo de 60º con el suelo. Encuentre las fuerzas en los puntos extremos. La escalera tiene “rueditas” en la parte superior de tal manera que la fricción con la pared es despreciable y “patitas” en la parte inferior para aumentar la fricción con el suelo.



Ejemplo

- Una escalera que pesa 40 N descansa contra un muro formando un ángulo de 60º con el suelo. Encuentre las fuerzas en los puntos extremos. La escalera tiene “rueditas” en la parte superior de tal manera que la fricción con la pared es despreciable y “patitas” en la parte inferior para aumentar la fricción con el suelo.



Suposiciones o consideraciones:

1. La longitud de la escalera es L.
2. La densidad de masa es uniforma.
3. Asi que, el peso esta en el centro de la escalera.

$$\sum \tau_i = W\left(\frac{1}{2}L\cos 60^o\right) - F_3\left(L sen 60^o\right) = 0$$

$$F_3 = \frac{W\cos 60^o}{2 sen 60^o} = 11.52N \Rightarrow F_1 = 11.52N$$

Equilibrio de fuerzas:

$$\sum F_{nx} = -F_1 + F_3 \Rightarrow F_3 = F_1$$

$$\sum F_{ny} = -W + F_2 \Rightarrow F_2 = W = 40N$$

Equilibrio de torcas alrededor del suelo por lo que los angulos correspondientes se deben medir respecto al brazo de palanca definido por la escalera:

$$\sum \tau_n = \frac{1}{2}LW\sin\left(-30^0\right) + LF_3\sin\left(60^0\right) = 0 \Rightarrow F_3 = \frac{1}{2}\frac{40\sin 30^0}{\sin 60^0} = 11.55$$

$F_3 = F_1 = 11.55N$ y $F_2 = 40N$

solución

$$\sum F_{ix} = -F_1 + F_3 = 0 \Rightarrow F_1 = F_3$$
$$\sum F_{iy} = -W + F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = W = 40N$$

Tomando las torcas alrededor del punto de apoyo en el suelo hará que las torcas de las incógnitas F1 y F2 sean cero,

$$\sum \tau_i = W\left(\frac{1}{2}L\cos 60^o\right) - F_3\left(Lsen\ 60^o\right) = 0$$

$$\therefore$$

$$F_3 = \frac{W\cos 60^o}{2\,sen\ 60^o} = 11.52\ N \Rightarrow F_1 = 11.52\ N$$

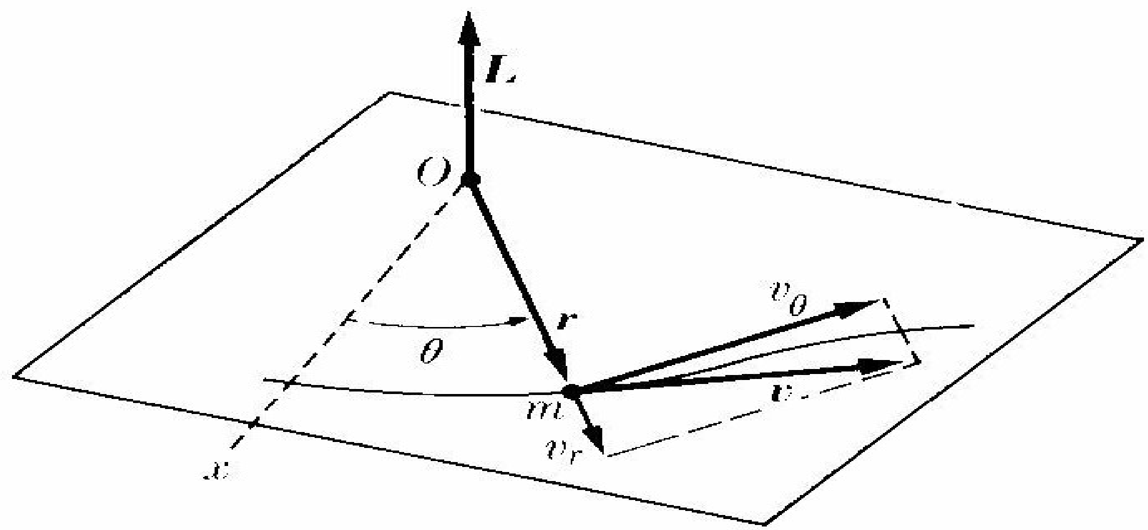
Momento Angular en el Movimiento Circular Uniforme

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$en \;\; círculo \;\; \mathbf{r} \perp \mathbf{v}$$

$$L = mrv = mr^2\omega$$

$$\mathbf{L} = mr^2\boldsymbol{\omega}$$



$$mov \;\; curvilineo \;\; \mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta$$

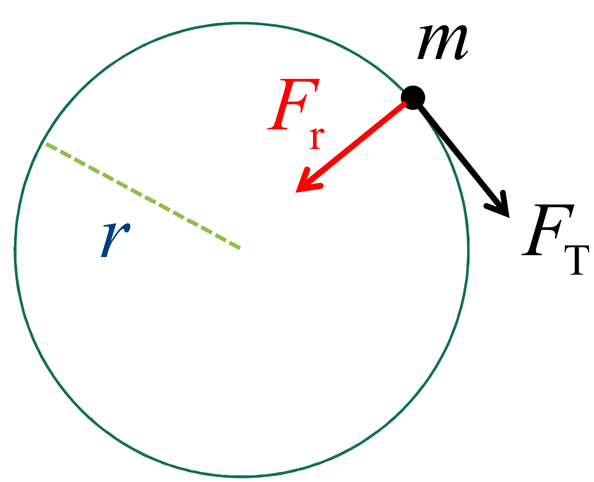
$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \left(\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\theta\right) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}_\theta$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v}_r = 0?$$

$$L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Relación entre la torca y la aceleración angular

Consideremos una partícula de masa m rotando en una circunferencia de radio r bajo la influencia de una fuerza tangencial F_T y una fuerza radial F_r.



Relación entre la torca y la aceleración angular

$\Rightarrow$ La fuerza tangencial produce una aceleración tangencial y la relación es

$$F_t = ma_t.$$

$\Rightarrow$ La torca alrededor del centro es

$$\tau = F_t r.$$

$$\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \sin\theta = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{F}\right| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = Fr$$

Relación entre la torca y la aceleración angular

$$\boxed{F_t = ma_t \quad \text{y} \quad \tau = F_t r.}$$

Por tanto, $\tau = (ma_t)r$

Además, $a_t = r\alpha$ y sustituyendo

$$\tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha$$

Identificando el momento de inercia, para una sola partícula

$$\tau = I\alpha$$

Relación entre la torca y la aceleración angular

$$F = ma$$

$$\Leftrightarrow$$

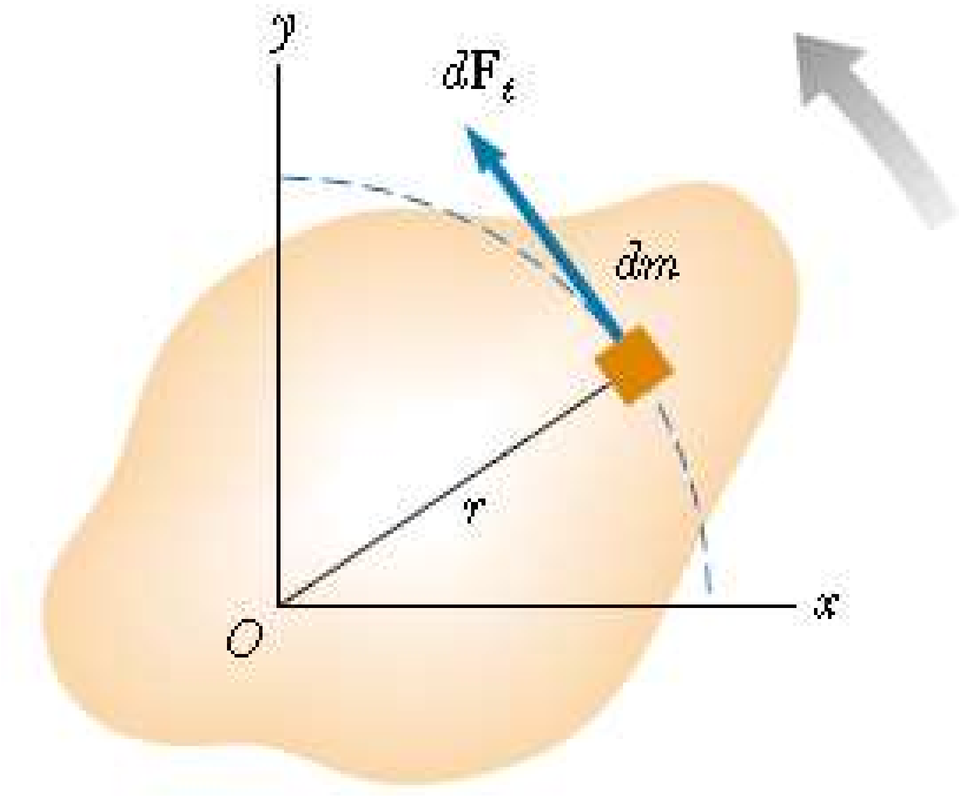
$$\tau = I\alpha$$

Díptico

Lineal	Circular
$\mathbf{r} = \left(x, y, z\right)$	$\boldsymbol{\theta} = \left(\theta_x, \theta_y, \theta_z\right)$
	$s = R\theta$
$\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$	$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
$\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$	$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\tau = I\alpha$
	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$
$\left\Vert\mathbf{F}\right\Vert = m\left\Vert\mathbf{a}\right\Vert$	$\left\Vert\boldsymbol{\tau}\right\Vert = \left\Vert\mathbf{r}\right\Vert\left\Vert\mathbf{F}\right\Vert \sin\beta$
$F = ma$	$\tau = I\alpha$

Relación entre la torca y la aceleración angular

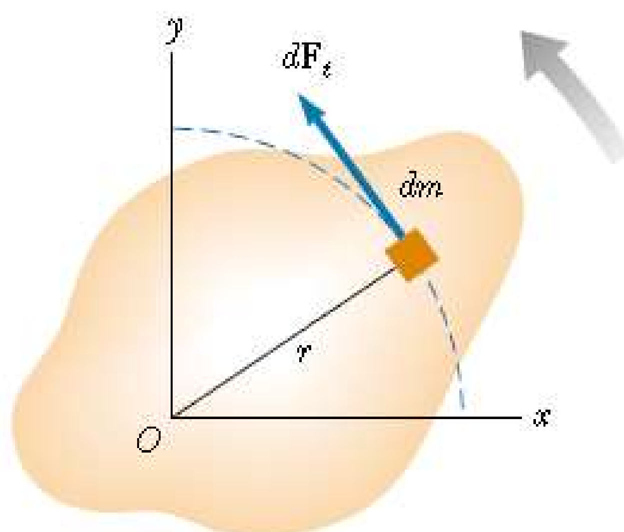
Consideremos ahora un cuerpo rígido.



Relación entre la torca y la aceleración angular

$$\boxed{a_t = r\alpha \qquad dF_t = a_t(dm) \qquad d\tau = rdF_t}$$

$$d\tau = rdF_t = (r\,dm)a_t = (r\,dm)r\alpha = (r^2 dm)\alpha$$



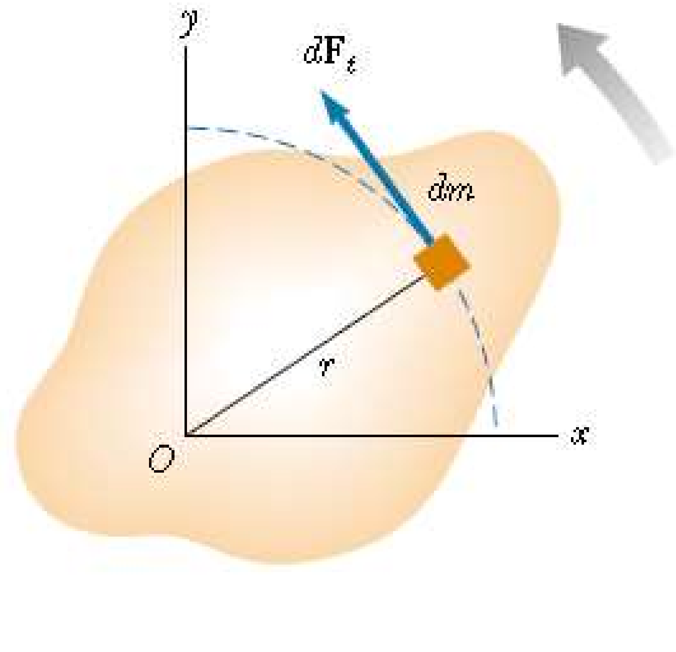
Relación entre la torca y la aceleración angular

$$\boxed{d\tau = \left(r^2 dm\right)\alpha}$$

$$\sum \tau = \int d\tau = \int \alpha r^2\, dm = \alpha \int r^2\, dm$$

$$I = \int r^2\, dm \quad \therefore$$

$$\sum \tau = I\alpha$$



Relación entre la torca y la aceleración angular

$$\sum \tau = I\alpha$$

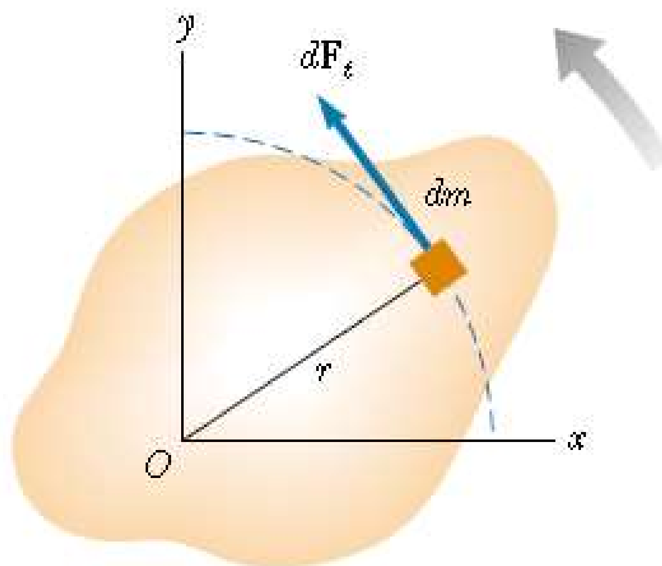


Tabla Resumen
Mapa Mental
Mapa Conceptual
Mapa Semantico
Cuadro Semantico
Cuadro Sinoptico

Díptico

Lineal	Circular
$\mathbf{r} = (x, y, z)$	$\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$
	$s = R\theta$
$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$	$\tau = I\alpha$
	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$
$\lVert\mathbf{F}\rVert = m\lVert\mathbf{a}\rVert$	$\lVert\boldsymbol{\tau}\rVert = \lVert\mathbf{r}\rVert\lVert\mathbf{F}\rVert \sin\beta$
$F = ma$	$\tau = I\alpha$

Díptico

Lineal

relaciones

Circular

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

en rotaciones

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$

en vez de $\mathbf{v}$ pogamos $\mathbf{p}$

$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times \mathbf{mv} = \mathbf{mr} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \frac{dp_x}{dt} & \frac{dp_y}{dt} & \frac{dp_z}{dt} \end{vmatrix} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

nota

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

si $\mathbf{r}$ es constante entonces

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Díptico

Lineal

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\|\mathbf{F}\| = m\|\mathbf{a}\|$$

$$F = ma$$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Circular

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z) \qquad s = R\theta$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\tau = I\alpha$$

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \|\mathbf{r}\|\|\mathbf{F}\|\sin\beta$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\omega = rv\sin\theta$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Movimiento Circular Uniforme

$$\mathrm{Re}\,cuerde$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$si \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = \omega R$$

$$también$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

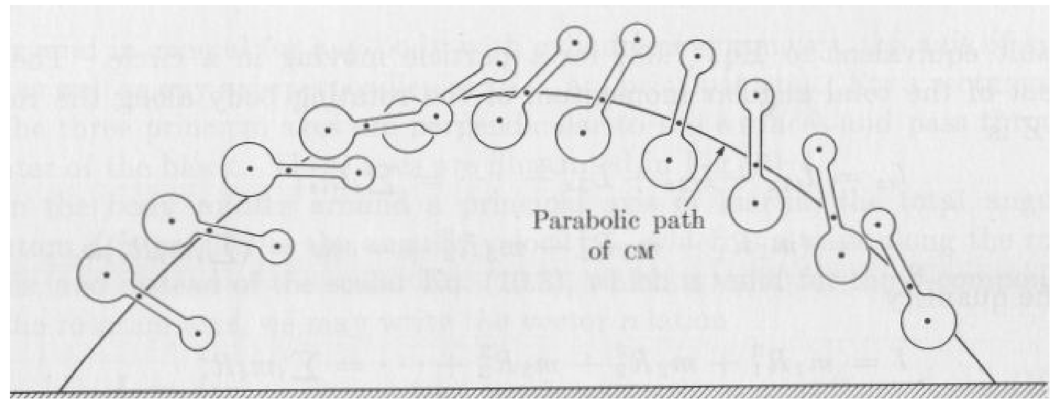
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

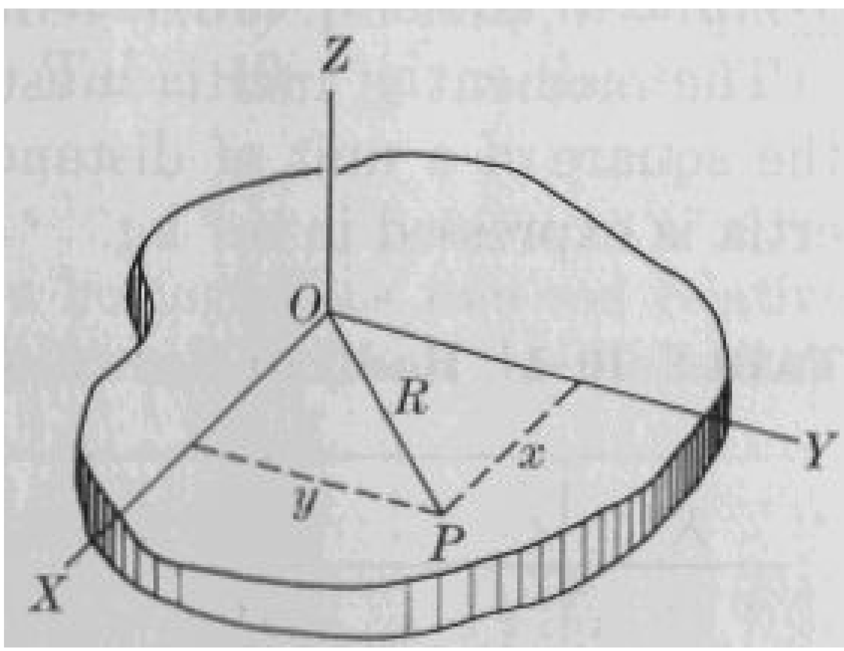
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$$

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}$$

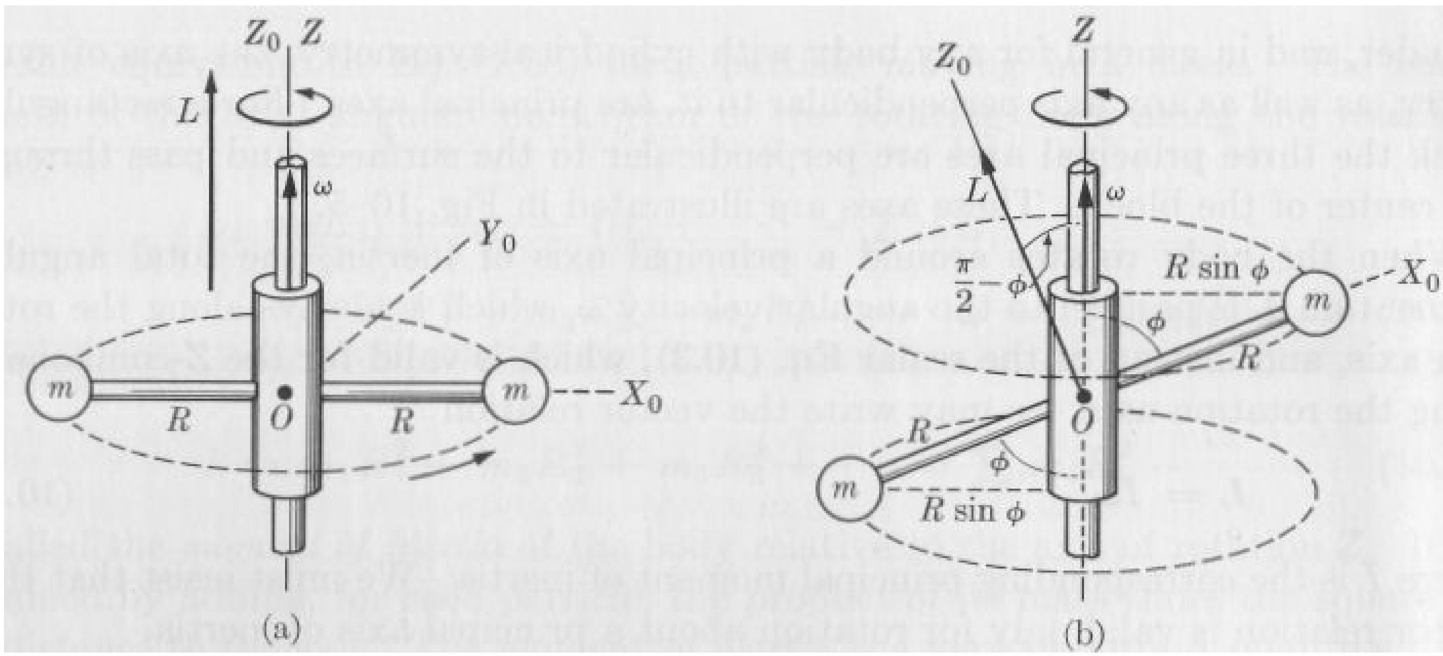
Tan tan

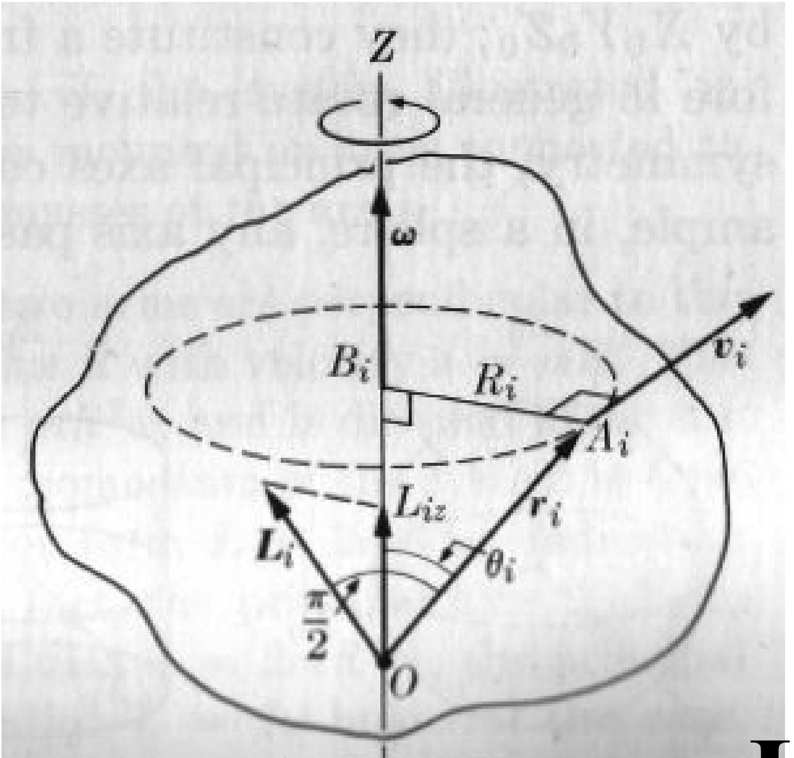
Cuerpo Rígido





Cuerpo Rígido





$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$$

$$L_i = m_i r_i v_i$$

$$L_{iz} = m_i r_i v_i \cos(\pi / 2 - \theta_i)$$

$$= m_i (r_i sen\theta_i)(\omega R_i) = m_i R_i^2 \omega$$

Momento de Inercia

$$L_{iz} = \sum_{i=1}^{N} L_{iz} = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} + \cdots =$$

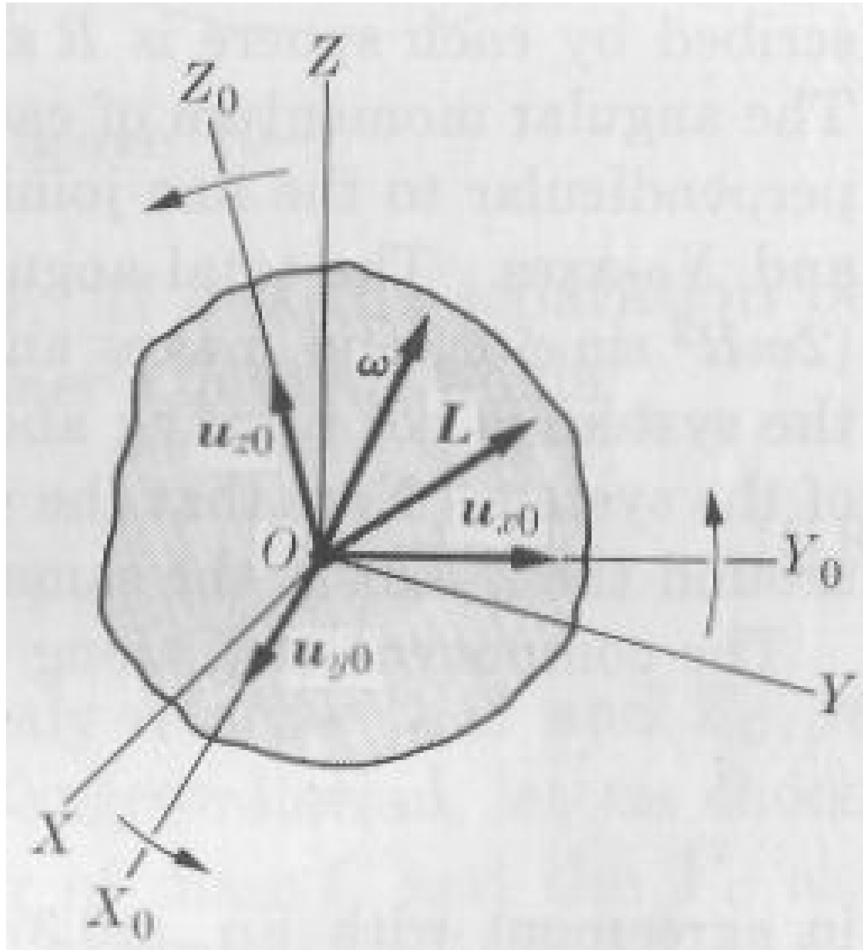
$$= \left(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \cdots\right)\omega = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2\right)\omega$$

definimos

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \cdots$$

$$\therefore$$

$$L_z = I\omega$$



$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{u}_{x0} I_1 \omega_{x0} + \mathbf{u}_{y0} I_2 \omega_{y0} + \mathbf{u}_{z0} I_1 \omega_{z0}$$

$$I = \sum_{n=0}^{m-1} m_n R_n^2$$

en el continuo

$$I = \int_{m_0}^{m} R^2 dm$$

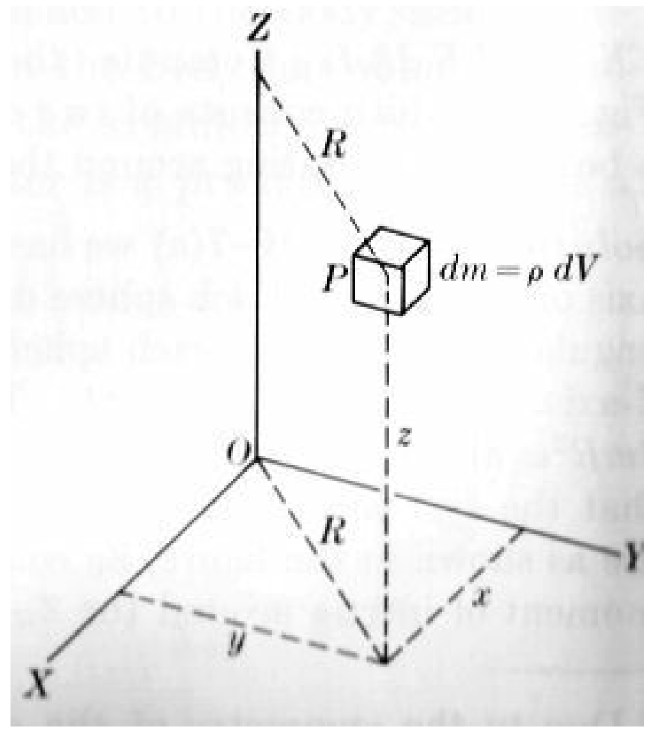
$$I = \int \rho R^2 dV$$

densidad cte

$$I = \rho \int R^2 dV$$

$$R^2 = x^2 + y^2$$

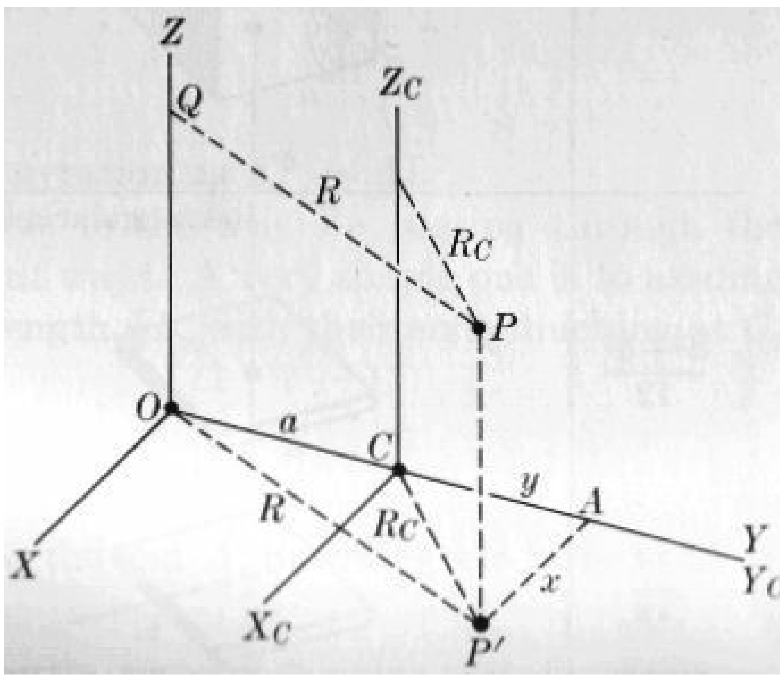
$$I_z = \int \rho \left(x^2 + y^2 \right) dV$$



Teorema de Steiner

$$I = I_c + Ma^2$$

Donde *I e Ic* son los momentos de inercia relativos a S y Sc



$$R_c^2 = x^2 + y^2$$

$$R = x^2 + (y+a)^2 = R_c^2 + 2ya + a^2$$

$$momento \;\; de \;\; inercia$$

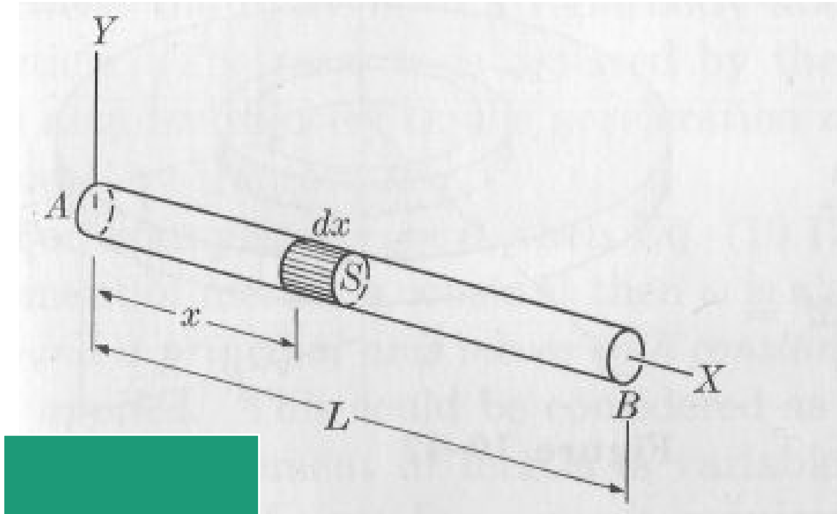
$$I = \sum mR^2 = \sum m\left(R_c^2 + 2ya + a^2\right) =$$

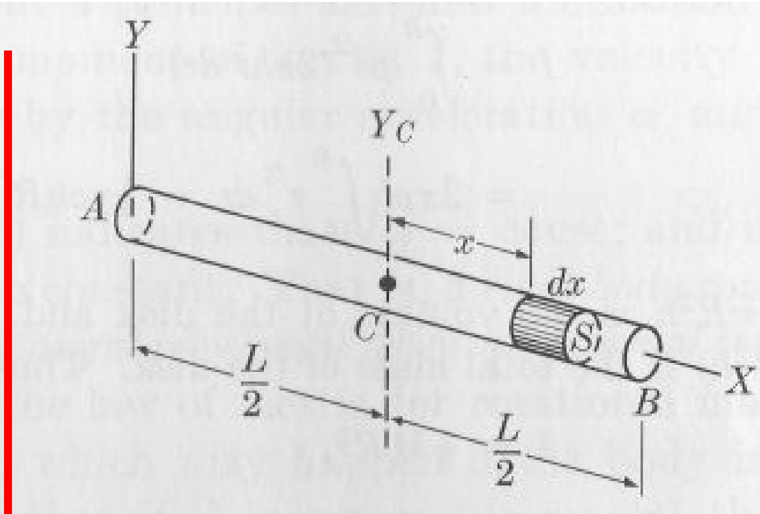
$$= \sum mR_c^2 + 2a\left(\sum my\right) + a^2 \sum m$$

$$\therefore I = I_c + 2a\sum my + Ma^2 \quad pero \;\; y_{cm} = \frac{\sum my}{m} = 0$$

$$I = I_c + Ma^2$$

Ejemplo





$$I = \int_0^L \rho x^2 (S dx) = \rho S \int_0^L x^2 dx$$

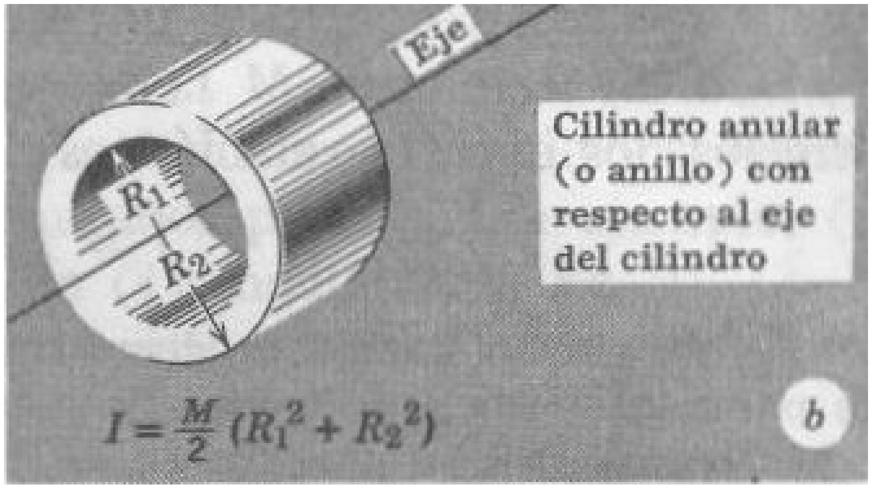
$$\therefore I = \frac{1}{3}\rho S L^3 \overset{?}{=} \frac{1}{3} M L^2$$

$$a) \quad I = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{1}{2}L\right)^2 = \frac{1}{12} M L^2$$

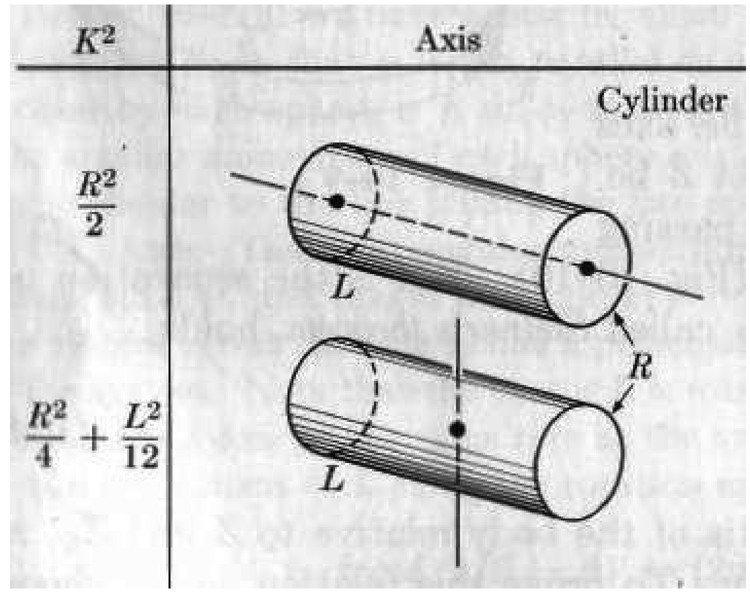
$$b) \quad I = \int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L}$$

$$c) \quad I_c = I_A - \frac{1}{4} M L^2 = \frac{1}{12} M L^2$$

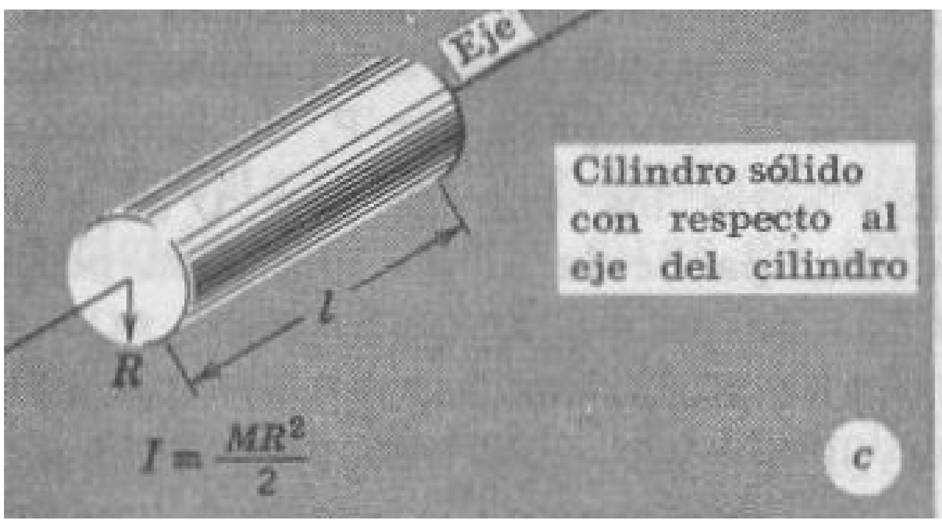
ejemplos



Eje
Cilindro anular (o anillo) con respecto al eje del cilindro
R_1
R_2
$I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$
b



K^2
Axis
Cylinder
$\frac{R^2}{2}$
$\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$
L
R
L



Eje
Cilindro sólido con respecto al eje del cilindro
R
l
$I = \frac{MR^2}{2}$
c

Eje
Cilindro sólido (o disco) con respecto a un diámetro central
R
l
$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$
d

Ejemplo

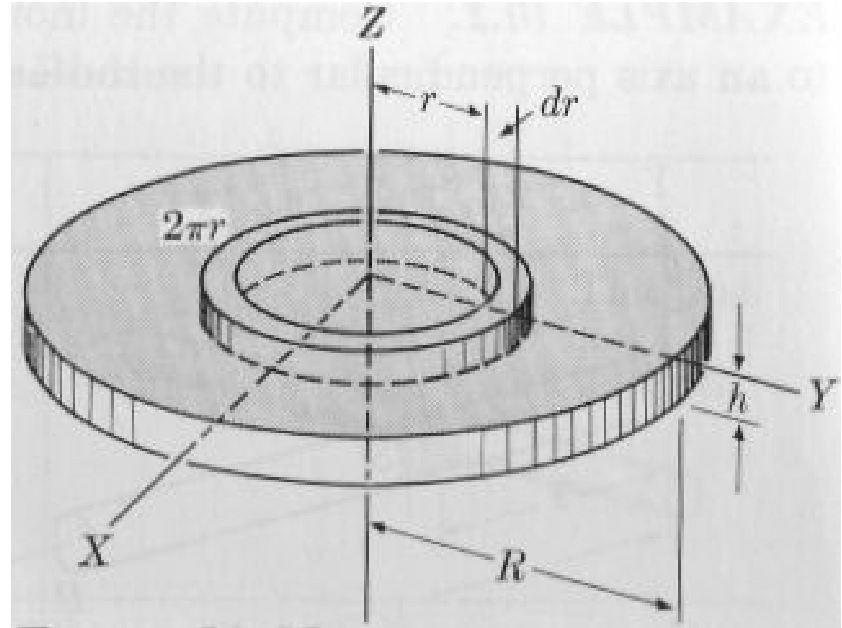
$$I = \int_0^R \rho r^2 (2\pi h r dr)$$

$$= 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4$$

pero

$$V = \pi R^2 h \quad \& \quad M = \rho\left(\pi R^2 h\right)$$

$$\therefore I = \frac{1}{2} M R^2$$



El 'teorema' de ejes perpendiculares

$$I_x = \int \rho y^2 dV \quad I_y = \int \rho x^2 dV$$

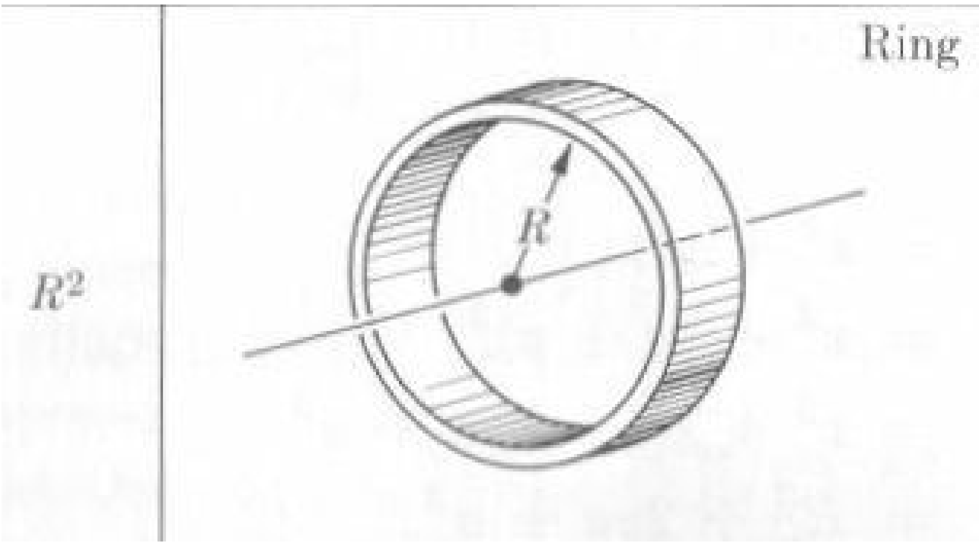
$$porque\ la\ coordenada\ Z \approx 0$$

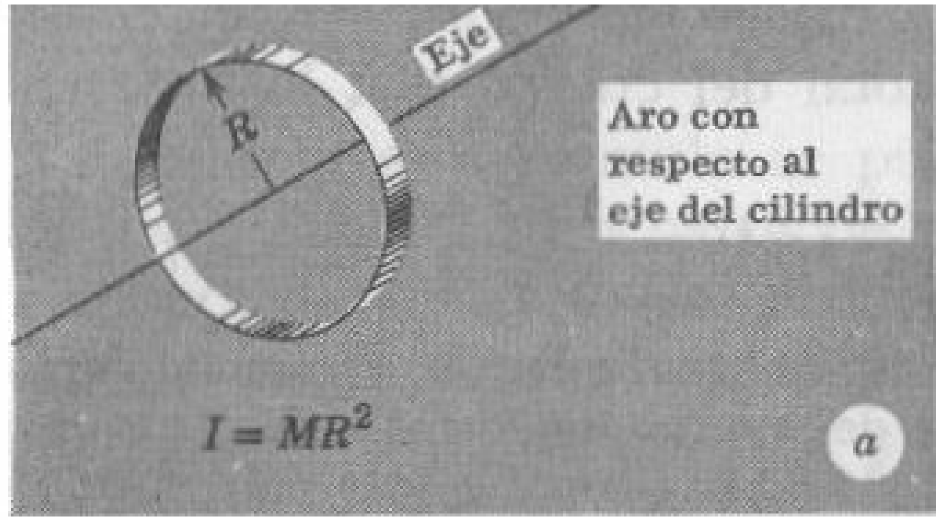
$$I_z = \int \rho\left(x^2 + y^2\right) dV \ \therefore I_z = I_x + I_y$$

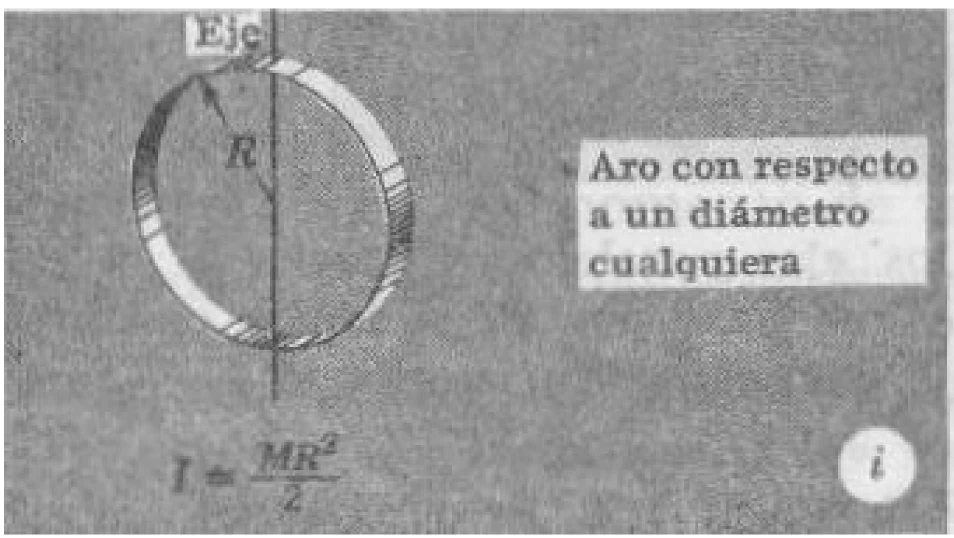
$$en\ este\ caso\ I_x = I_y$$

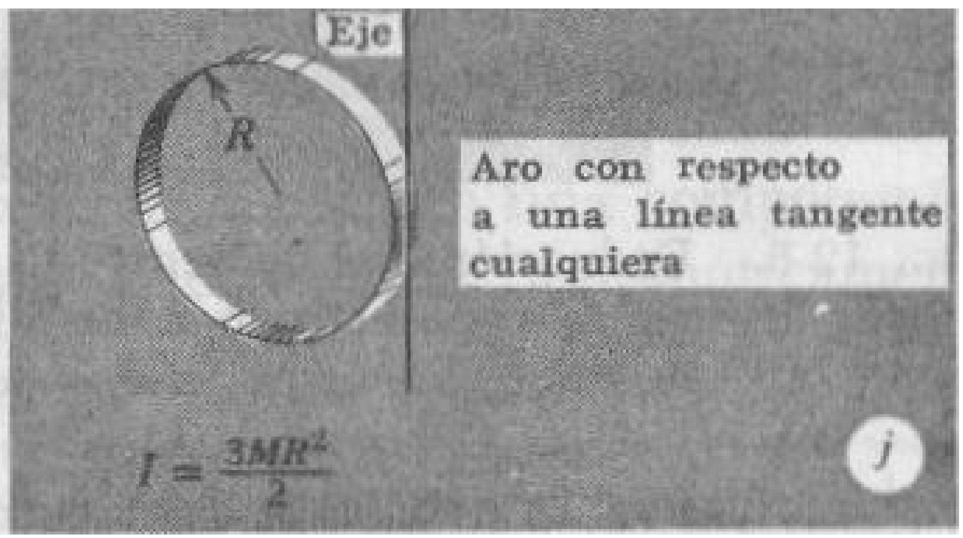
$$\therefore I_z = 2I_x \Rightarrow I_x = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} M R^2$$

ejemplos

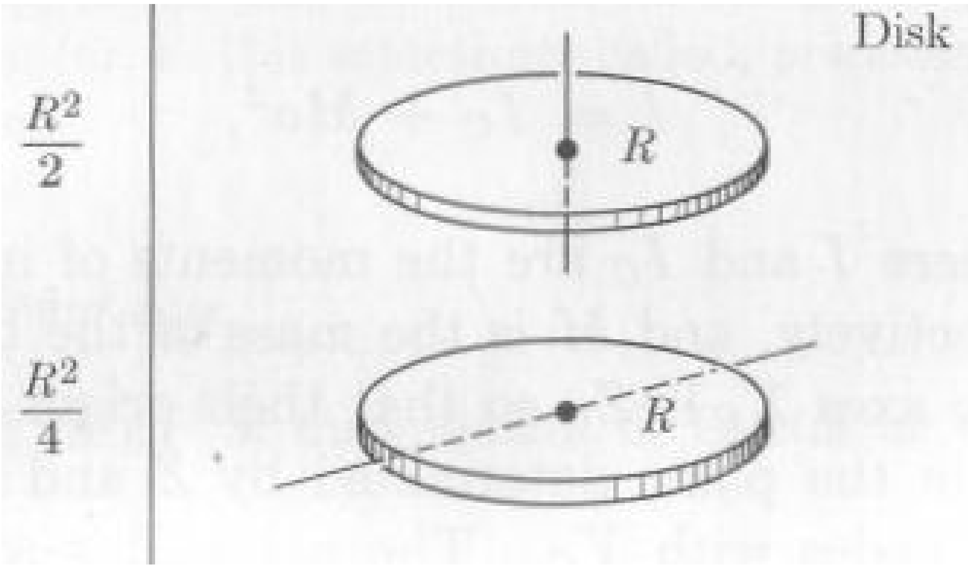

Ring
R
R^2


Eje
R
Aro con
respecto al
eje del cilindro
$I = MR^2$
a

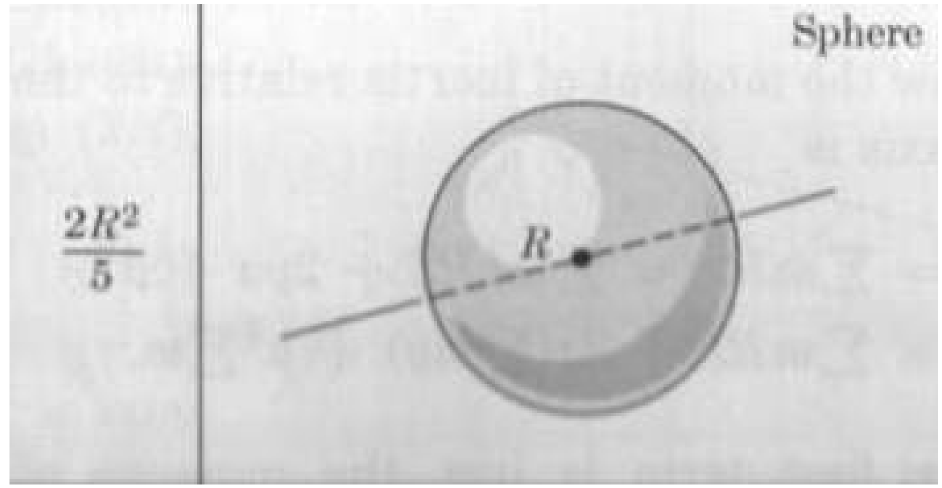

Eje
R
Aro con respecto
a un diámetro
cualquiera
$I = \frac{MR^2}{2}$
i


Eje
R
Aro con respecto
a una línea tangente
cualquiera
$I = \frac{3MR^2}{2}$
j

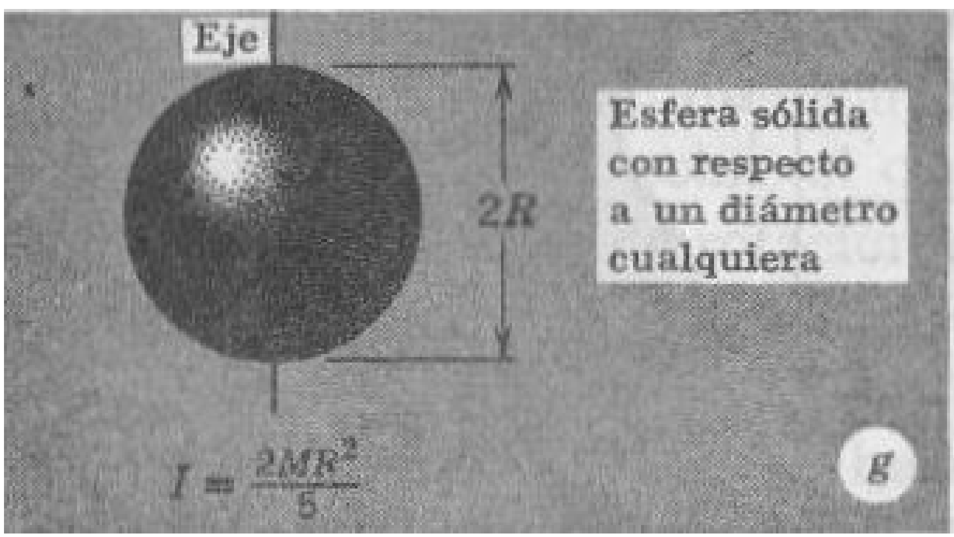
ejemplos



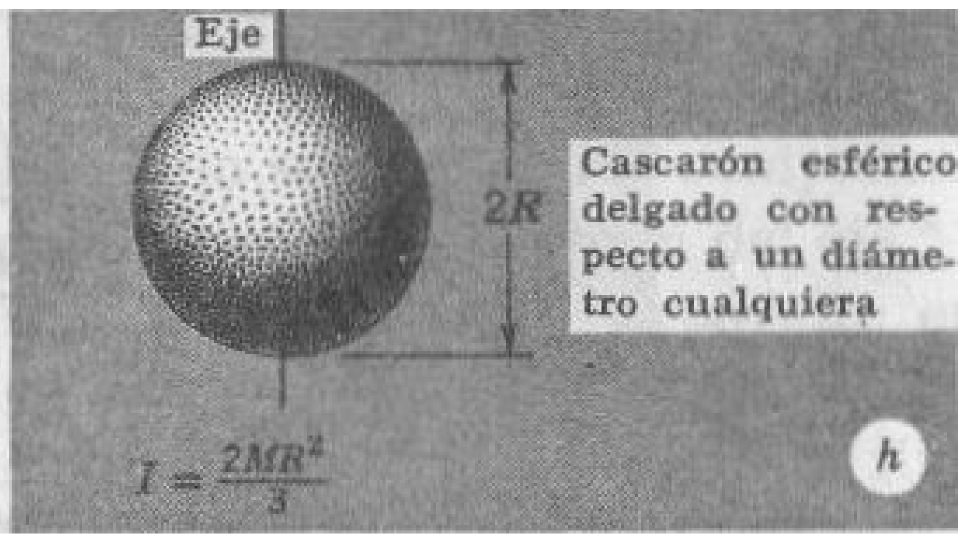
Disk
$\frac{R^2}{2}$
R
$\frac{R^2}{4}$
R



Sphere
$\frac{2R^2}{5}$
R



Eje
2R
Esfera sólida con respecto a un diámetro cualquiera
$I = \frac{2MR^2}{5}$
g



Eje
2R
Cascarón esférico delgado con respecto a un diámetro cualquiera
$I = \frac{2MR^2}{3}$
h

Ecuación de Movimiento para un cuerpo Rígido Rotando

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt}$$

Si el eje permanece fijo relativo al cuerpo rígido, el momento de inercia permanece constante

$$\boldsymbol{\tau} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}$$

Cuando el eje no tiene un punto fijo respecto a un marco Inercial, es conveniente calcular L y T respecto a CM

$$\boldsymbol{\tau}_{CM} = \frac{d\mathbf{L}_{CM}}{dt}$$

Conservación del Momentum Angular

Si $\boldsymbol{\tau} = 0 \therefore I\boldsymbol{\omega} = cte$

Si el momento de inercia es constante,
la velocidad angular es también constante

En la ausencia de torcas externas,
un cuerpo rígido rotando alrededor de un eje principal
Se mueve con velocidad angular constante

Conservación del Momentum Angular

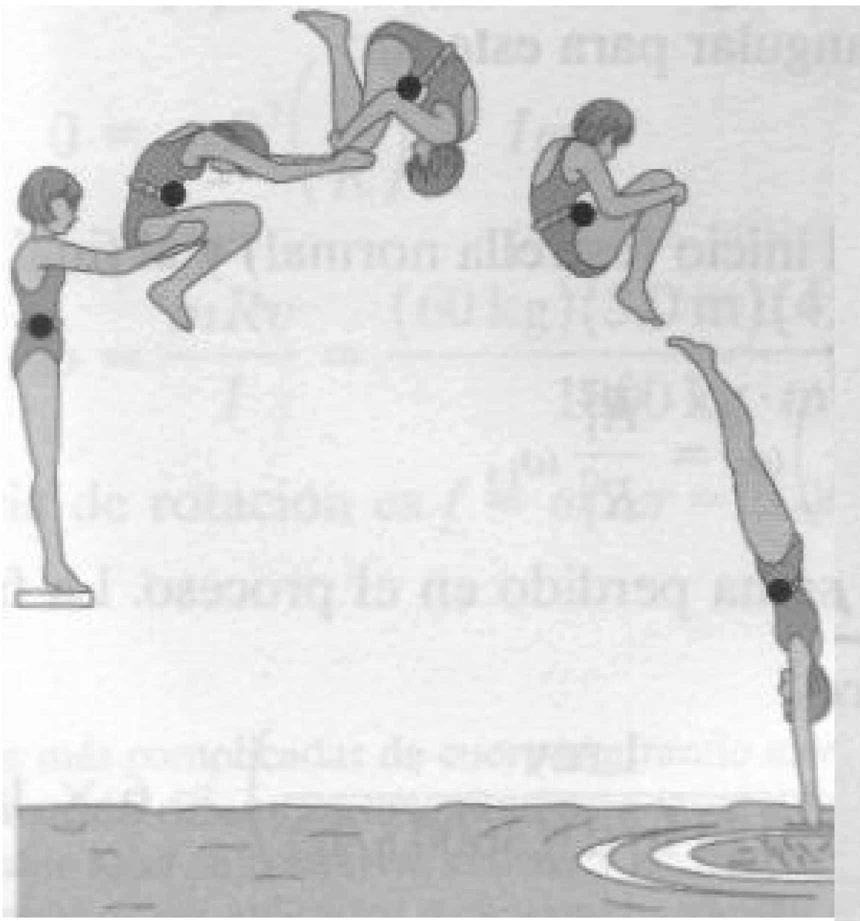
Cuando el momento de inercia es variable, como en el caso de que el cuerpo no sea rígido, la condición $I\boldsymbol{\omega} = cte$

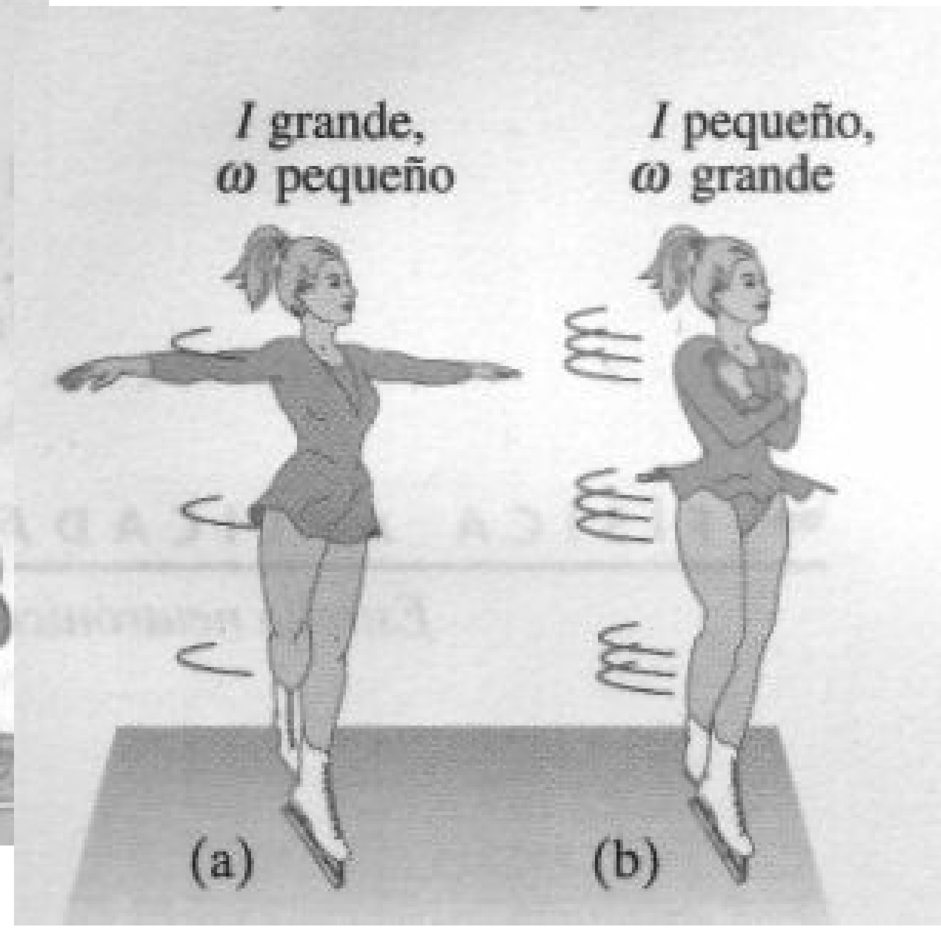
requiere que si

el momento de inercia incrementa (decrementa)

entonces

la velocidad angular decrementa (incrementa)

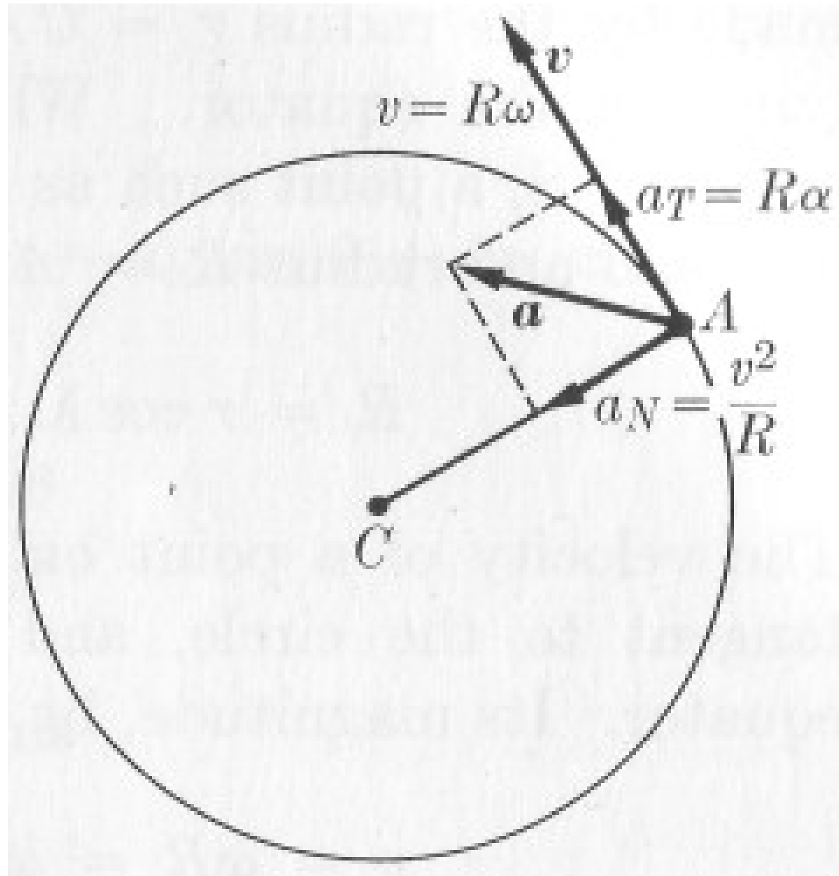


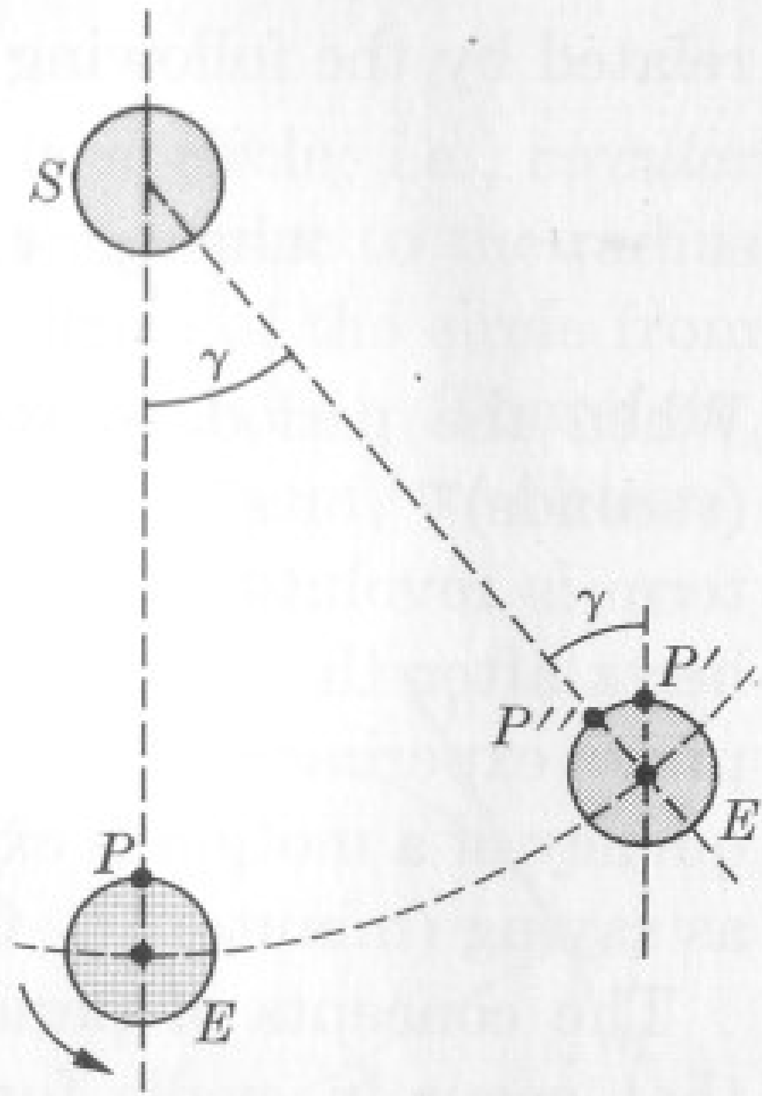

I grande,
ω pequeño
I pequeño,
ω grande
(a)
(b)

Aceleración Angular

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

$$a_r = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$




S
γ
γ
P′
P′′
E′
P
E

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$