Vectores

Dr. Rogerio Enríquez

Objetivo Educativo

- Reflexión sobre lo que ya se sabe
- Dominar los conceptos como maestros
- Unir la geometría con el álgebra
- Deducir lógicamente el álgebra
- Explorar el dominio matemático

Lo que se sabe

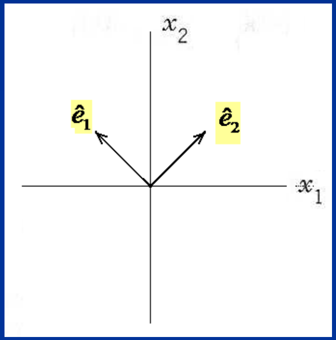
- ¿De dónde proviene el concepto de vector?
- Donde se han usado
- Significado universal
- Campo Vectorial
- Espacio Vectorial

Axiomas sobre la adición y multiplicación

- Axiomas de CAMPO
- Cualquier conjunto que cumpla será un campo
- Propiedades de CAMPO:
  - Leyes conmutativas
  - Leyes asociativas
  - Leyes distributivas
  - Elemento idéntico para cada operación
  - Elementos inversos

Example 2:

$$\{\hat{e}_1,\, \hat{e}_2\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$ *basis of* R^2



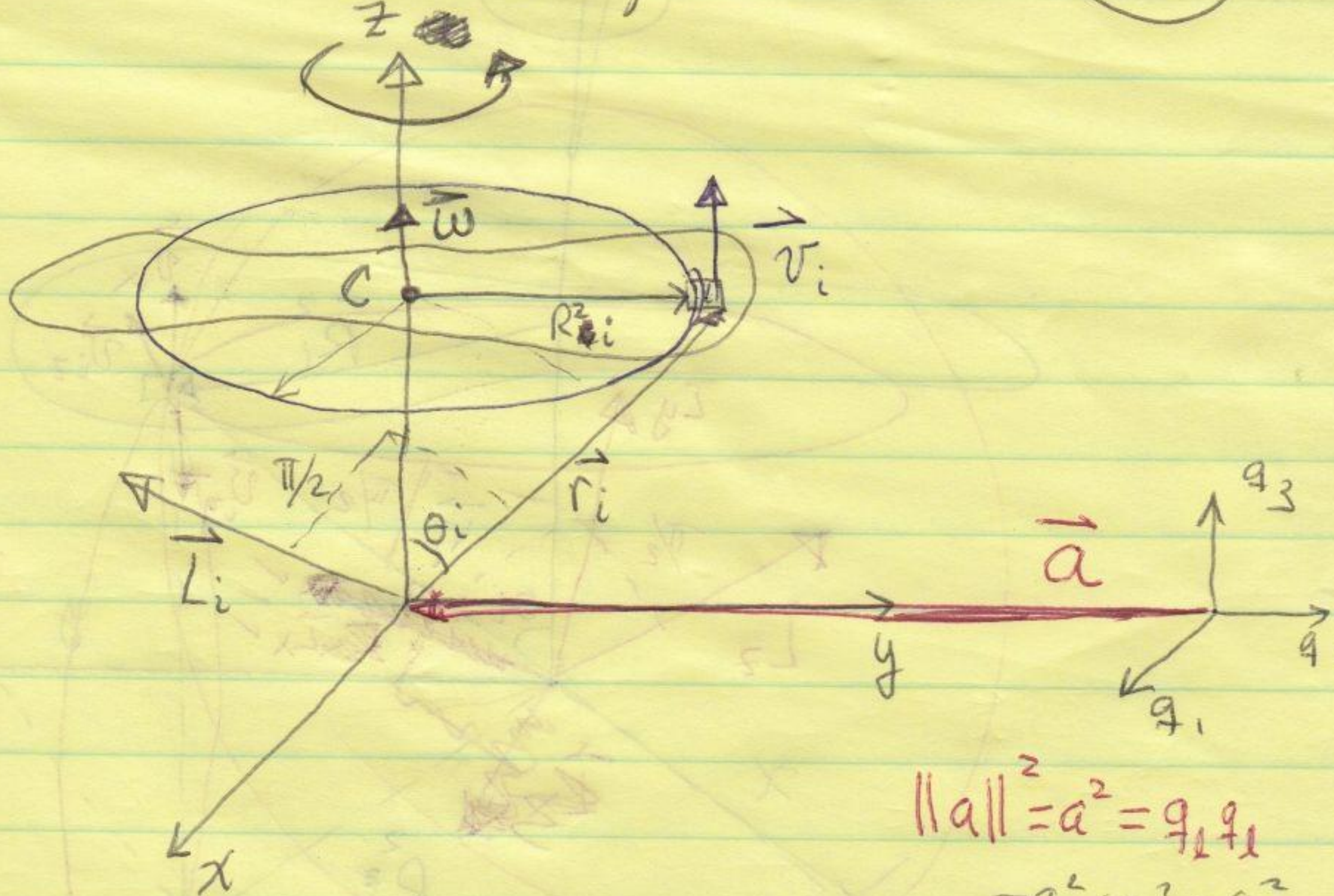
Another basis of R^2:

$$\{e_1,\, e_2\} = \{(4,1), (-1,4)\}$$

- Bases chuecas sistema de ecuaciones

Momento Angular

II



$$\|a\|^2 = a^2 = q_l q_l$$
$$= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Resumen

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \sum_{m=1}^{n} a_m \mathbf{e}_m$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\alpha = \sum_{m=1}^{n} a_m b_m \leftrightarrow \text{proyeccion} \leftrightarrow \textit{comparacion}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{n} \leftrightarrow \textit{vector} \;\; \textit{que representa} \text{ al } \textit{area}$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}\times\mathbf{c} = V \; \|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\alpha \leftrightarrow \textit{area} \updownarrow$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}\times\mathbf{c} = V \leftrightarrow \textit{volumen}$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}\times\mathbf{c} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_x \\ \mathbf{L}_y \\ \mathbf{L}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{xx}} & L_{\mathbf{xy}} & L_{\mathbf{xz}} \\ L_{\mathbf{yx}} & L_{\mathbf{yy}} & L_{\mathbf{yz}} \\ L_{\mathbf{zx}} & L_{\mathbf{zy}} & L_{\mathbf{zz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} = L_{nm} \leftrightarrow \textit{tensor}, n \text{ es el renglon } m \text{ es la columna}$$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{i} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\bullet\mathbf{i} = a_1$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{j} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\bullet\mathbf{j} = a_2$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{k} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\bullet\mathbf{k} = a_3$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{e}_l = \left(\sum_{m=1}^{n} a_m\mathbf{e}_m\right)\bullet\mathbf{e}_l = a_l$$

notacion

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{i} = \mathbf{i}\bullet\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{j} = \mathbf{j}\bullet\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix}$$

reescribiendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$3D$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \textit{vectores base } \text{ortogonales } \textit{linealmente independientes}$$

cambio de base

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \rightarrow \textit{vectores base } \text{ortonormales } \textit{linealmente independientes}$$

$$\textit{cambio de base no necesariamente ortogonales}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} comp_{e1} \\ comp_{e2} \end{bmatrix}$$

$$\textit{observaciones}:$$

$$\text{Matriz no diagonal}$$

$$\textit{sistema de } 2 \textit{ ecuaciones } \text{con } 2 \text{ incognitas}$$

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = d$$

$$\textit{regla de Cramer}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \bullet (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = b_{11}x + b_{12}y = comp_{e1}$$

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \bullet (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = b_{21}x + b_{22}y = comp_{e2}$$

$$\textit{donde}$$

$$b_{lm} = \mathbf{e}_l \bullet \mathbf{e}_m$$

cambio de base no necesariamente ortogonales

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\bullet(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = b_{11}x + b_{12}y = comp_{e1}$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\bullet(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = b_{21}x + b_{22}y = comp_{e2}$$

donde

$$b_{lm} = \mathbf{e}_l\bullet\mathbf{e}_m$$

nD

$$\mathbf{e}_l\bullet\mathbf{a} = \mathbf{e}_l\bullet\left(\sum_{m=1}^{n}\mathbf{e}_m a_m\right) \neq a_l$$

$$\sum_{m=1}^{n}\mathbf{e}_l\bullet\mathbf{e}_m a_m = \left[b_{lm}\right]\mathbf{a}^T = \mathbf{BA} = \mathbf{C}$$

observaciones

Si B fuera diagonal, la solucion del sistema de ecuaciones esta facil.

Cuantos vectores base se necesitan? que implica con respecto a la dimension de la matriz?

Si hay mas vectores base que los necesarios para la dimension del espacio vectorial

que pasa con el sistema de ecuaciones? y que pasa on la matriz?

Example 4

Vector Space of Matrices

The real 2×2 matrices form a four-dimensional real vector space. A basis is

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

any 2×2 matrix $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ has a unique representation

$$\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{B}_{11} + a_{12}\mathbf{B}_{12} + a_{21}\mathbf{B}_{21} + a_{22}\mathbf{B}_{22}.$$

Example 3

Vector Space of Polynomials

The set of all constant, linear, and quadratic polynomials in x

basis $\{1, x, x^2\}$

$$Another\quad Basis: \left\{2,\ 4+x,\ 8+x^2\right\}$$

Basis

A basis of a “n”dim*ension*al vector space is a set of n vectors linearly independent inside the space

Let $\mathbf{e}_{(1)}, \cdots, \mathbf{e}_{(n)}$ be any basis for R^n

Then every $\mathbf{x}$ in R^n has a unique representation

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_{(1)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_{(n)}$$

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^{n} x_m \mathbf{e}_m$$

$$\mathbf{y} = \sum_{m=1}^{n} y_m \mathbf{e}_m$$

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{m=1}^{n} x_m y_m = \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots\ldots + x_m y_m\right)$$

suponga que las componentes ya no son discretas sino continutas entonces como queda la suma?

$$\mathbf{x} = \sum_{m=1}^{n} x_m \mathbf{e}_m$$

$$\mathbf{y} = \sum_{m=1}^{n} y_m \mathbf{e}_m$$

$$\mathbf{x} \bullet \mathbf{y} = \sum_{m=1}^{n} x_m y_m = \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \ldots\ldots.. + x_m y_m \right)$$

suponga que las componentes ya no son discretas sino continutas entonces como queda la suma?

$$\int_{\Re} x(m) y(m) dm$$

m ahora es continua y para no mezclar notaciones podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) y(\theta) d\theta$$

Que significa?

y como le quiere llamar?

defina

$$\left\langle x(\vartheta), y(\vartheta) \right\rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) y(\theta) d\theta$$

producto punto de funciones que es basicamente la comparacion entre funciones

ahora,

Que significa?

$$\left\langle x(\vartheta), x(\vartheta) \right\rangle$$

Que significa?

$$\langle x(\vartheta), x(\vartheta)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)x(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(\theta)d\theta \triangleq \|x(\theta)\|^2$$

norma

forma de medir funciones......

por isomorfismo se puede decir que las funciones forman

un espacio vectorial normado!!!

y bajo esa norma es un espacio de Hilbert

La integral es de Reimman? Nel !!!

De que dimension es el espacio?

Existen dimensiones racionales? irracionales?

Existen funciones base ?

Cuantas serian?

Como las eligiria? ortogonales? ortonormales?

como normalizaria una funcion?

Que significa?

$$\left\langle x(\vartheta), x(\vartheta) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)x(\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(\theta)d\theta \triangleq \left\| x(\theta) \right\|^2$$

norma

forma de medir funciones......

por isomorfismo se puede decir que las funciones forman un espacio vectorial normado

Puede haber otra norma L^1

L^2

$f \in L^2$

podemos escribir cualquier funcion de ese espacio en terminos de sus funcines base ψ

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(\theta)$$

Como encontramos la componente de la funcion f wrt ψ_1?

on de ese espacio en terminos de sus funcines base ψ

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(\theta)$$

Como encontramos la componente de la funcion f wrt ψ_1?

Concentremonos en las funciones periodicas.

Cuales serian las funciones base de ese espacio?

Cual es la variable natural de esas funciones base?

Ejemplo: cos

Funciones pares e impares

Cambio de base....