Mecánica clásica

El trabajo

y

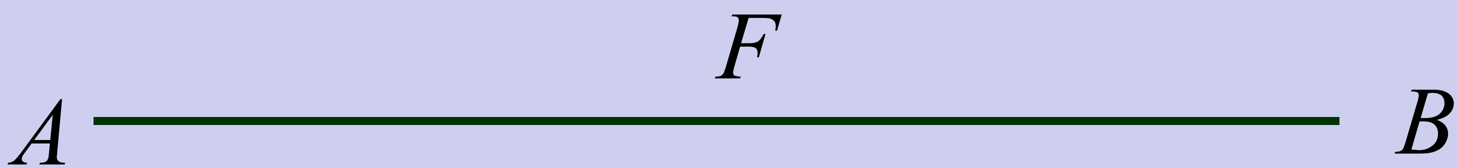
la energía cinética

El trabajo

El trabajo hecho por una fuerza constante en una dimensión

El trabajo W hecho sobre un objeto, por un agente externo ejerciendo una fuerza constante en el objeto, es el producto de la fuerza y de la magnitud del desplazamiento:

$$W = F * l$$



El trabajo hecho por una fuerza constante en una dimensión

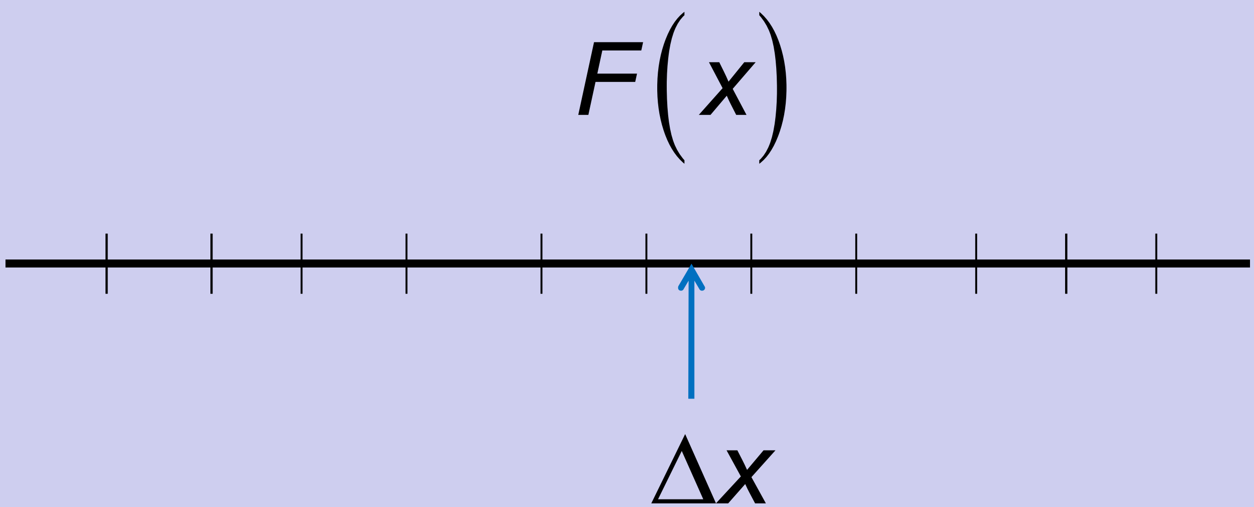
$$\boxed{W = F * l}$$

En SI: $\left[W\right] = \text{Nxm} \equiv \text{Joule}$

En CGS: $\left[W\right] = \text{Dinaxcm} \equiv \text{Ergio}$

El trabajo hecho por una fuerza variable en una dimensión

$$\Delta W = F(x)\,\Delta x$$

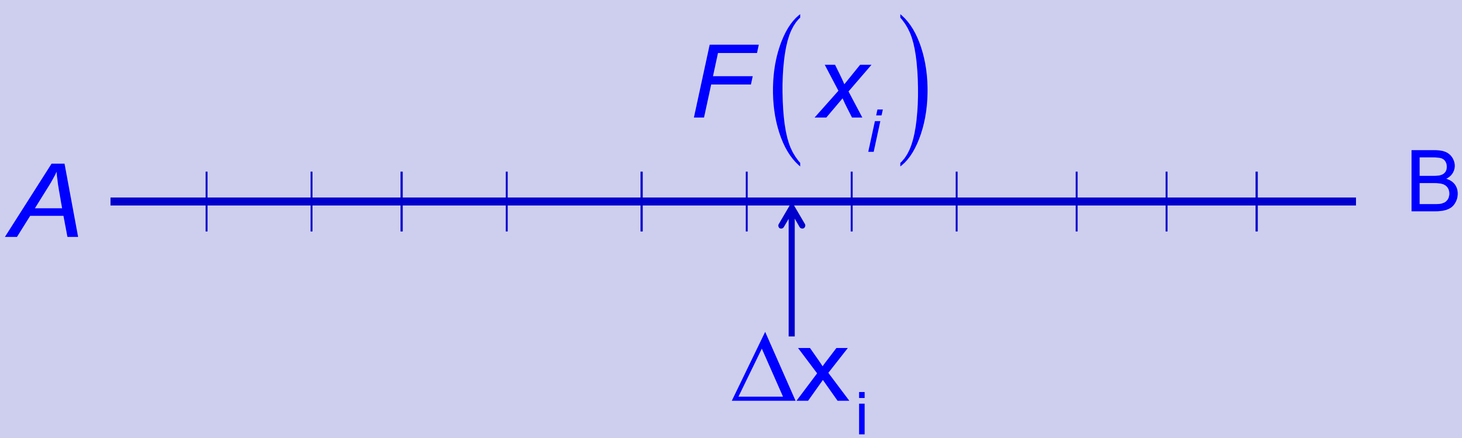


El trabajo hecho por una fuerza variable en una dimensión

$$\Delta W_i = F(x_i)\,\Delta x_i$$

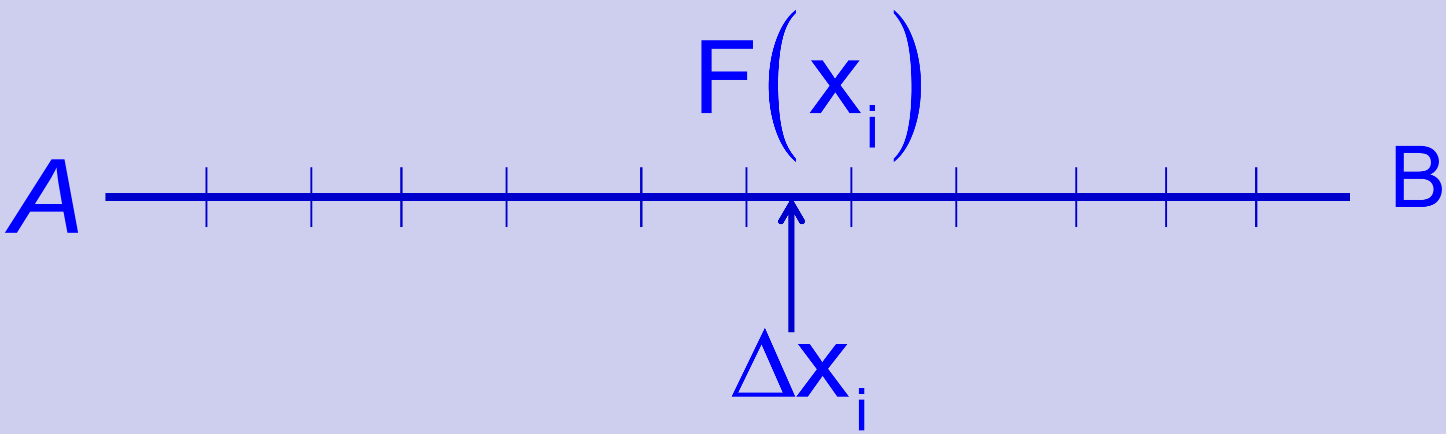
$$W \approx \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\,\Delta x_i$$

$$W = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \|\Delta x\| \to 0}} \sum_{i=1}^{N} F(x_i)\,\Delta x_i = \int_A^B F(x)\,dx$$



El trabajo hecho por una fuerza variable en una dimensión

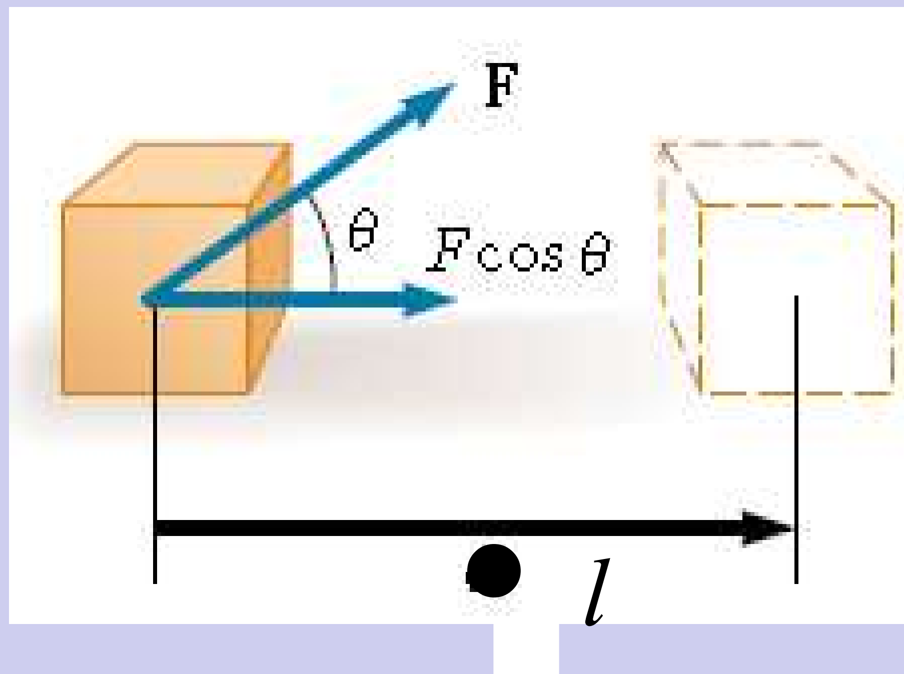
$$W = \int_{A}^{B} F(x)\,dx$$



El trabajo hecho por una fuerza constante

El trabajo *W* hecho sobre un objeto, por un agente externo ejerciendo una fuerza constante en el objeto, es el producto de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y la magnitud del desplazamiento:

$$W = F\cos\theta * l$$



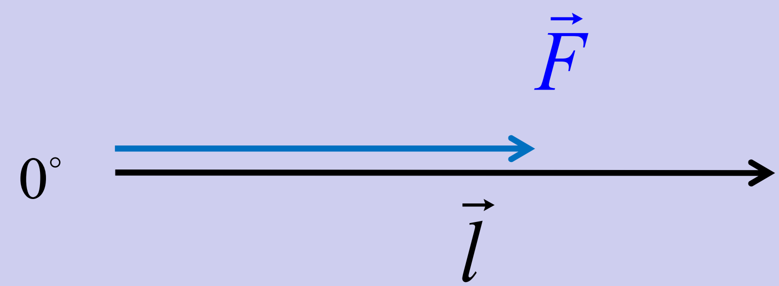
El trabajo hecho por una fuerza constante

$$W = Fl\cos\theta$$

Si la fuerza $\vec{F}$ es paralela al desplazamiento;

es decir, θ=0°, el trabajo es

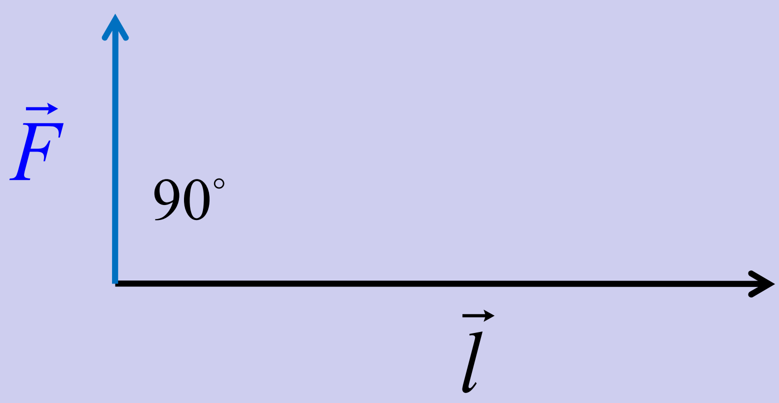
$W = Fl$



El trabajo hecho por una fuerza constante

$$W = Fl\cos\theta$$

Si la fuerza $\vec{F}$ es perpendicular al desplazamiento; es decir, $\theta = 90^\circ$, el trabajo es cero, $W = 0$, ya que $\cos 90^\circ = 0$



El trabajo hecho por una fuerza constante

$$W = Fl\cos\theta$$

El signo del trabajo depende de la dirección de $\vec{F}$ en relación a $\vec{l}$.
El trabajo es positivo cuando la componente de la fuerza tiene la misma dirección que el desplazamiento.

El factor $\cos\theta$ se encarga automaticamente del signo correspondiente.

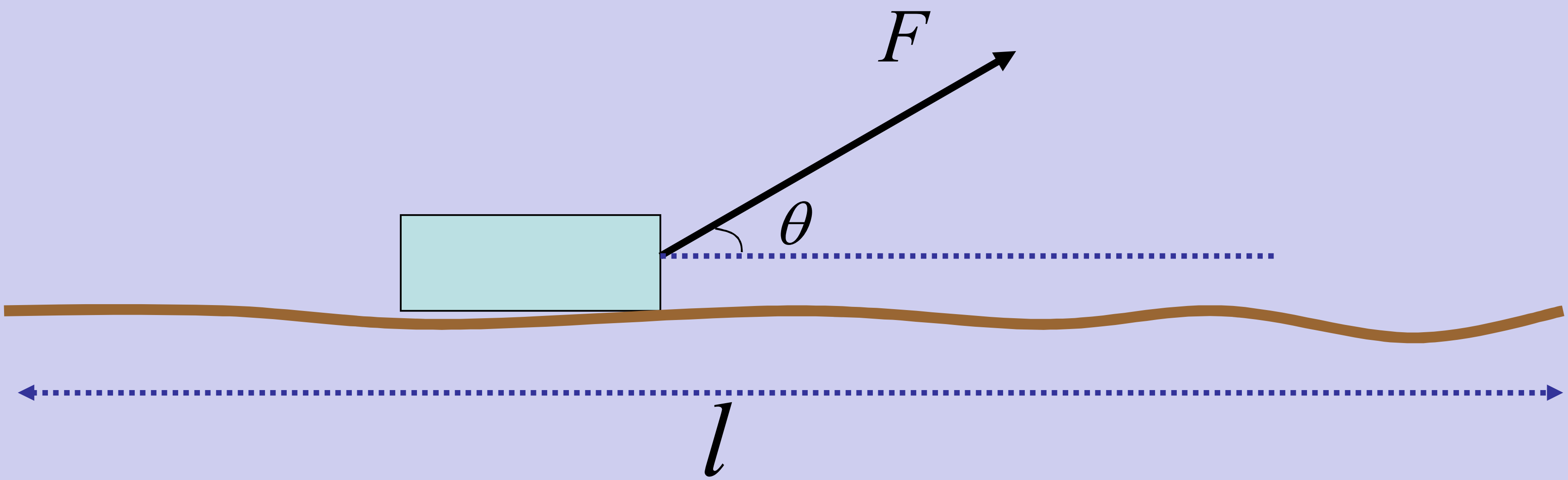
El trabajo hecho por una fuerza constante

Es importante notar que el trabajo es una transferencia de energía.

$\Rightarrow$ Si la energía es transferida al sistema, W es positivo.

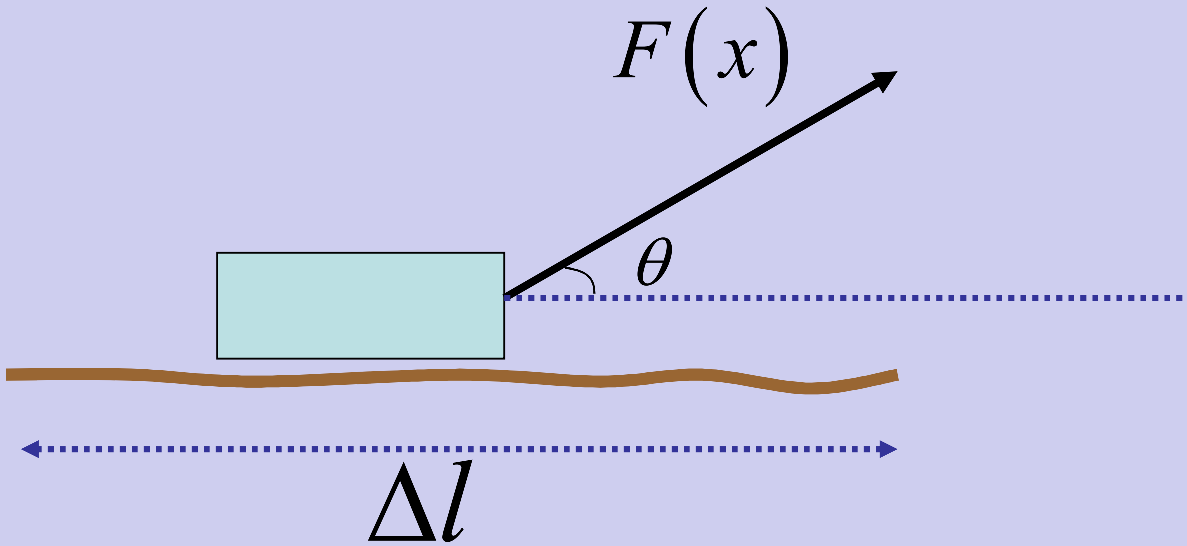
$\Rightarrow$ Si es el sistema el que transfiere la energía, W es negativo.

El trabajo hecho por una fuerza constante



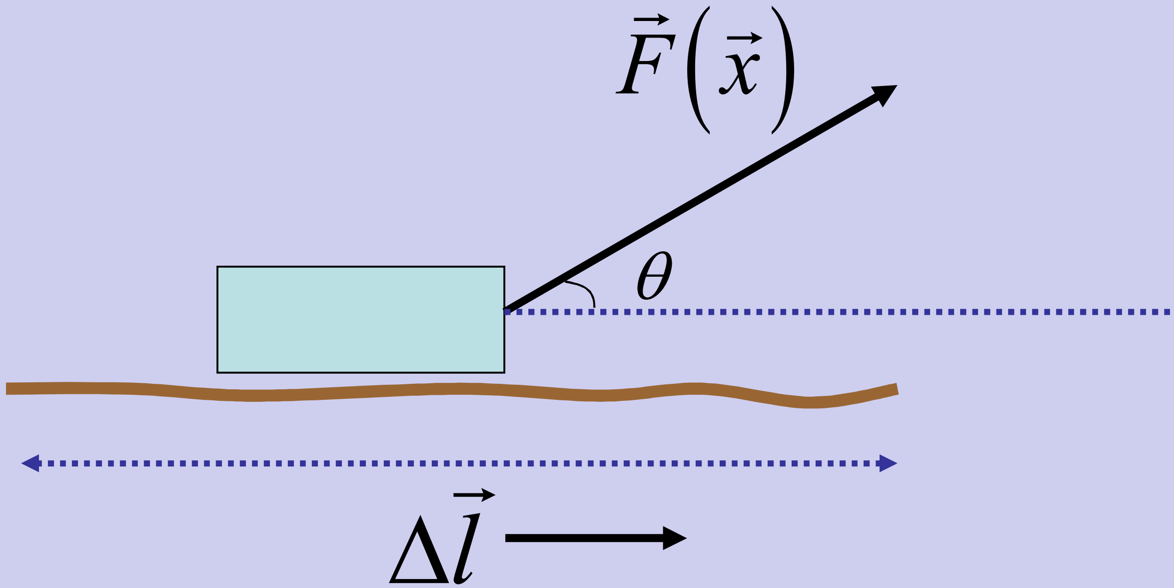
$$W = F\cos\theta * l$$

El trabajo hecho por una fuerza variable



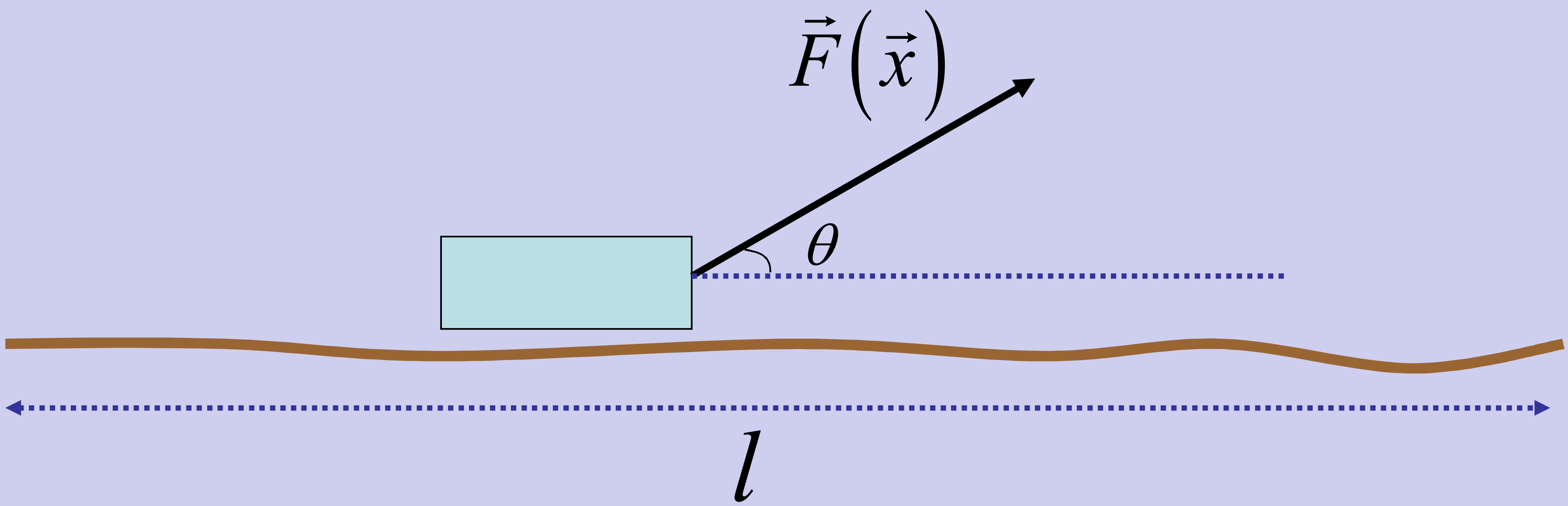
$$\Delta W = F(x)\cos\theta * \Delta l$$

El trabajo hecho por una fuerza variable



$$\Delta W = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \Delta\vec{l}$$

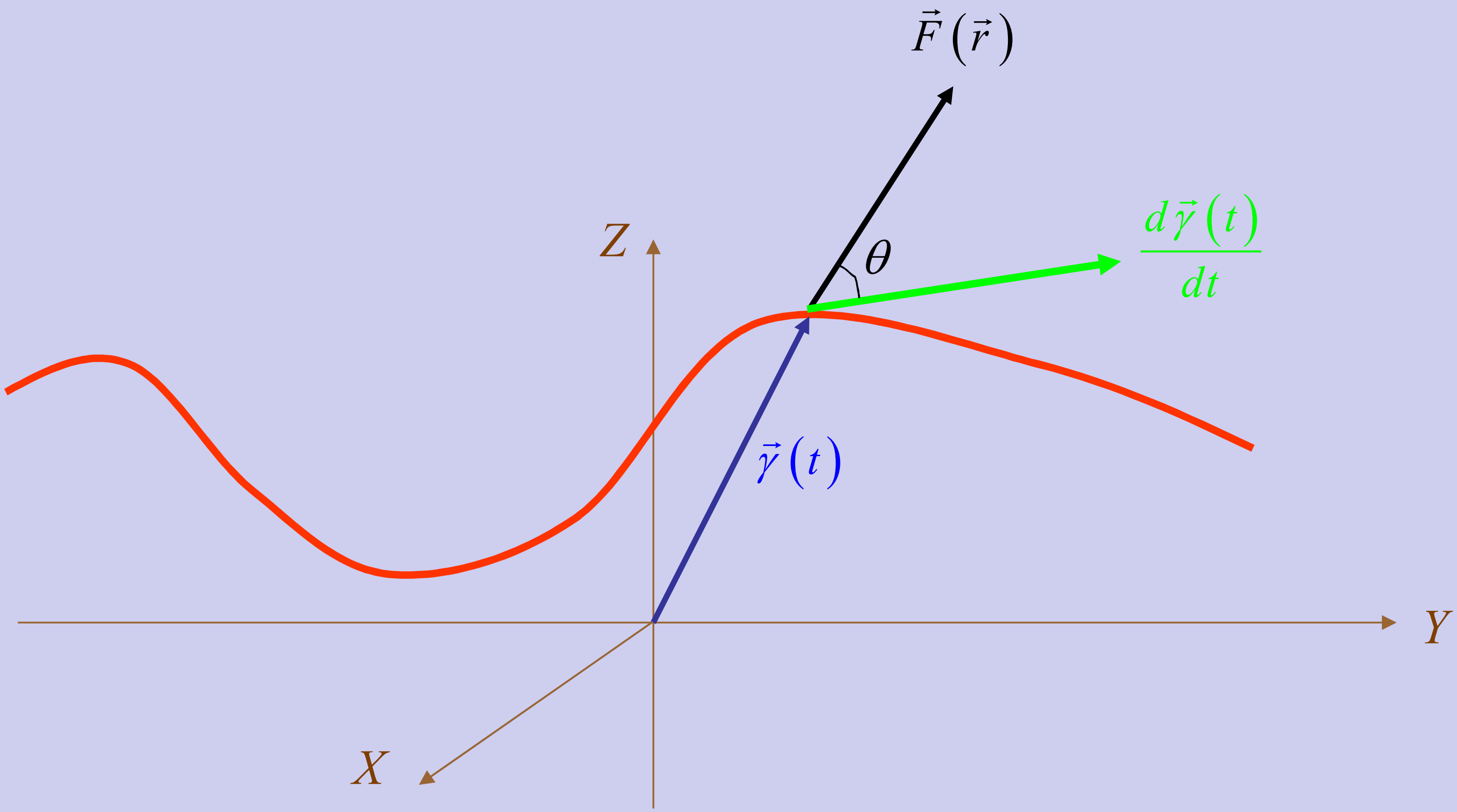
El trabajo hecho por una fuerza variable



$$W = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(\vec{x}_i)\cdot \Delta\vec{l}_i = \int \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

El trabajo

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

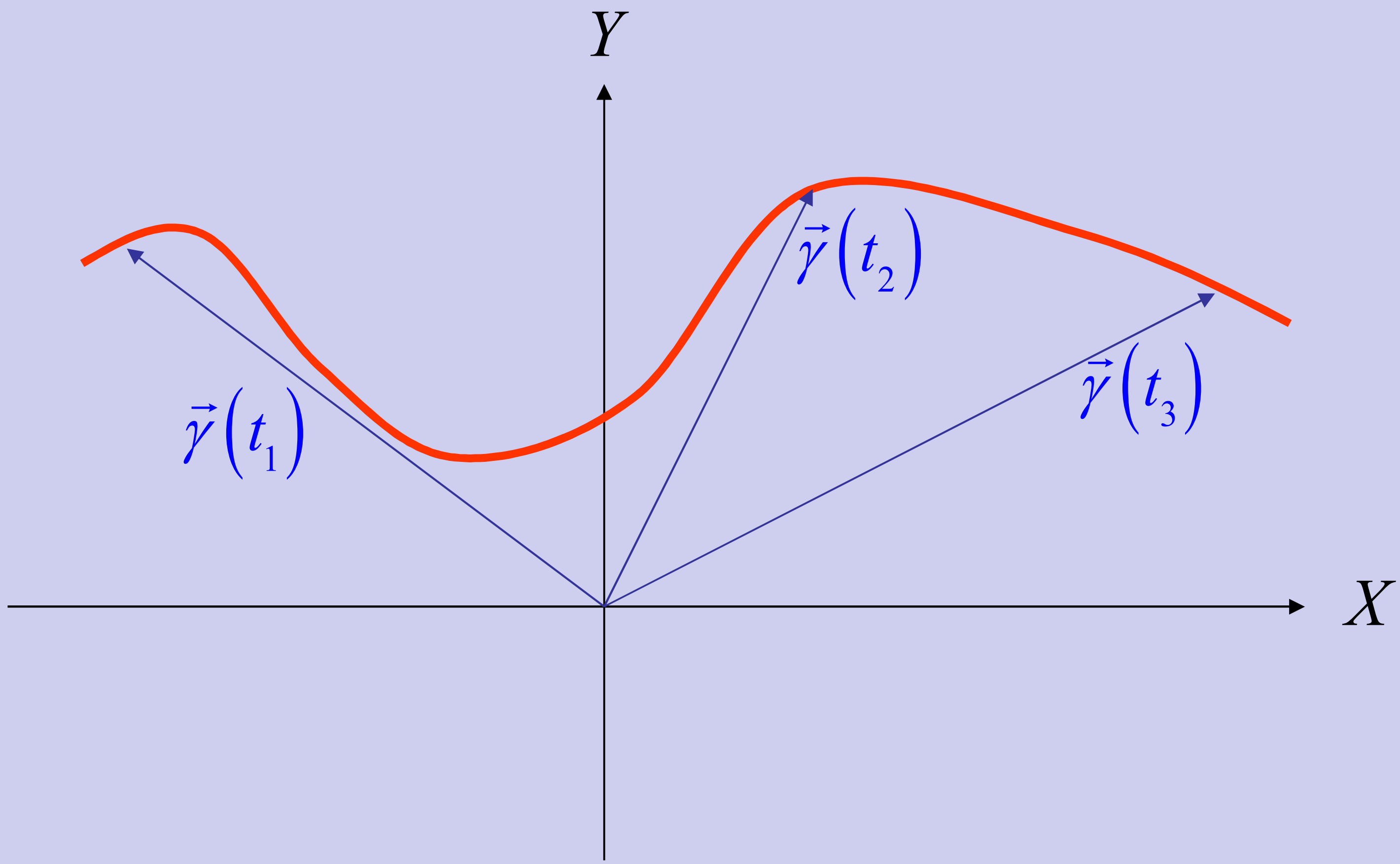


Repaso de calculo vectorial

Integrales de línea

Descripción paramétrica de una curva

Sea una curva $\vec{\gamma} : I = \left[a,b \right] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



Integral de linea

Sea un campo vectorial: $\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

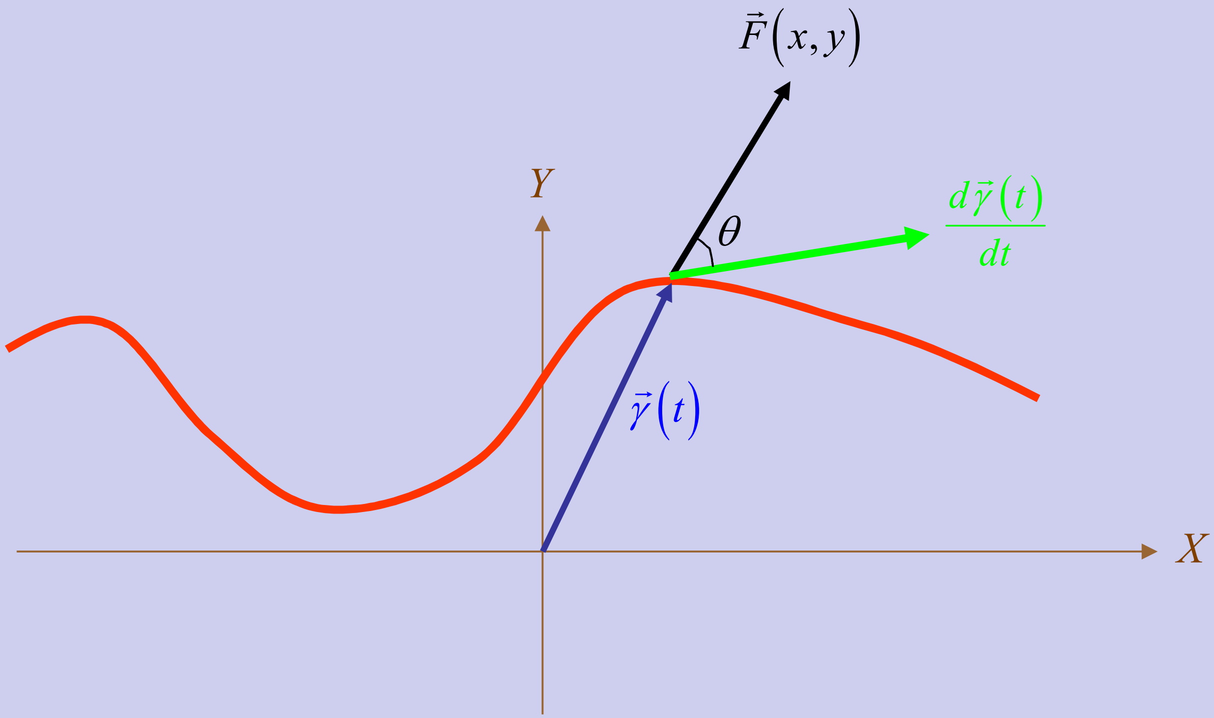
Sea una curva $\vec{\gamma} : I = \left[a, b \right] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

Se define la integral de línea como

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}\left[\vec{\gamma}\left(t\right)\right] \cdot \frac{d\vec{\gamma}\left(t\right)}{dt} dt =$$

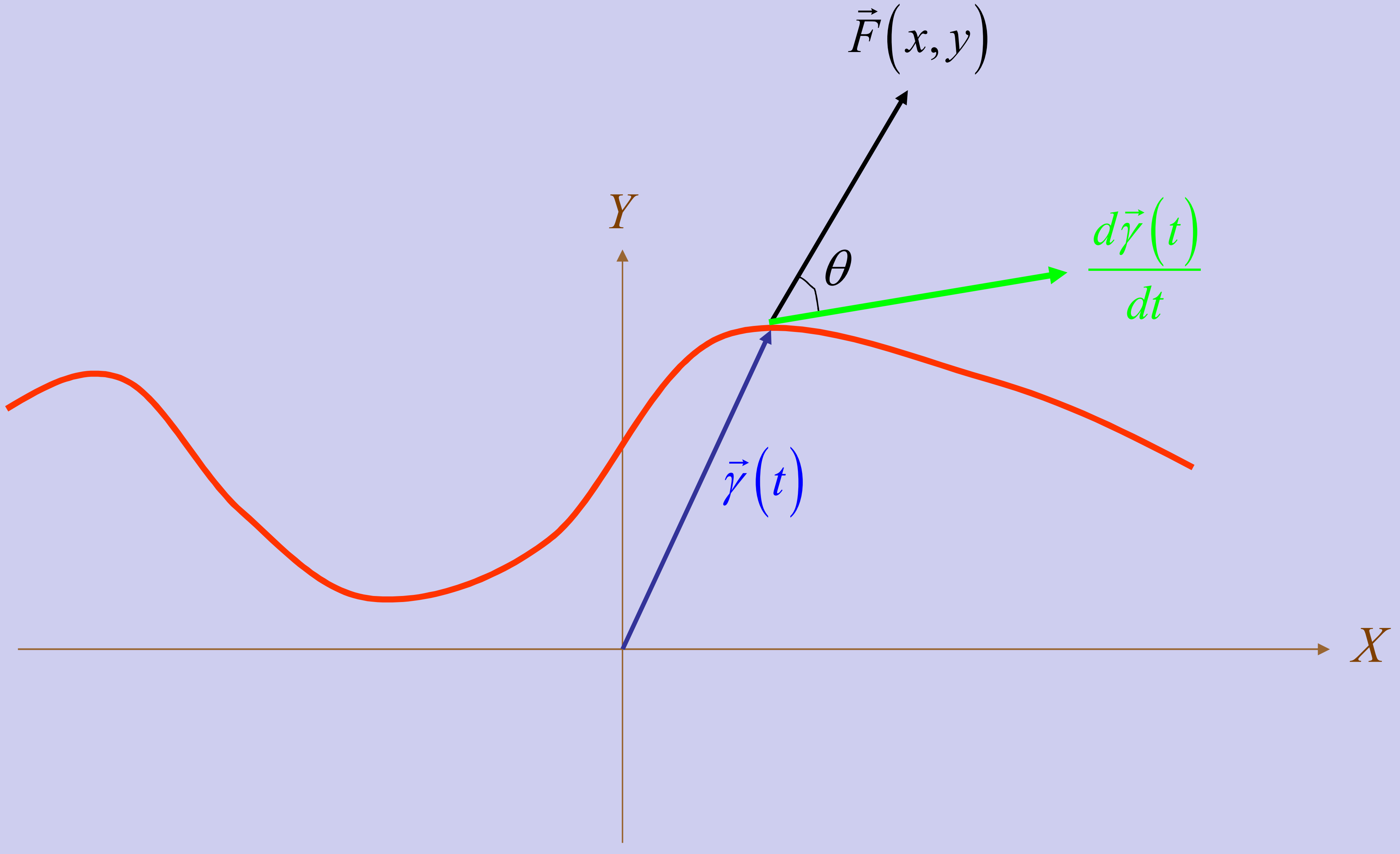
$$= \int_a^b \left|\vec{F}\left[\vec{\gamma}\left(t\right)\right]\right| \left|\frac{d\vec{\gamma}\left(t\right)}{dt}\right| \cos\theta dt$$

Integral de linea



$$\int_{\gamma} \vec{F}\left[\vec{\gamma}(t)\right] \cdot \frac{d\vec{\gamma}(t)}{dt} dt = \int_{a}^{b} \left|\vec{F}\left[\vec{\gamma}(t)\right]\right| \left|\frac{d\vec{\gamma}(t)}{dt}\right| \cos\theta dt$$

Integral de linea



Integral de linea

$$\vec{F} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{\gamma} : I = \left[a,b \right] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\int_{\gamma} \vec{F}\left(\vec{r}\right) \cdot d\vec{l} = \int_{a}^{b} \vec{F}\left[\vec{\gamma}\left(t\right)\right] \cdot \frac{d\vec{\gamma}\left(t\right)}{dt} dt$$

Las funciones vectoriales

Las funciones de varias variables

En el cálculo elemental se estudian funciones de una sola variable.

Sin embargo, en la vida real la mayoría de los fenómenos y los procesos dependen de varias variables.

Por tanto, son las funciones de varias variables las que, en general, sirven para describir correctamente los procesos de la naturaleza.

Por motivos metodológicos las podemos dividir como:

- Funciones vectoriales
- Funciones escalares de un vector o campos escalares
- Funciones vectoriales de un vector o campos vectoriales

Campos escalares

$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

A cada elemento de R^n, es decir, a cada vector,
se le asocia un número real, $\vec{x} \to \phi\left(\vec{x}\right)$

En el caso de $n = 2$, podemos "dibujar" la gráfica,

$$\text{Gráfica} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left(x, y, \phi\left(x, y \right) \right) \right\}$$

Campos escalares. Ejemplo 1

$$\phi : R^2 \to R \qquad \vec{x} \to \phi\left(x,y\right) = 1 - x - y$$

$$\text{Gráfica} = \left\{ \mathbf{v} \in R^3 \left| \left(x, y, 1 - x - y \right) \right. \right\}$$

x	*Y*	*φ(x,y)=1-x-y*
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	-1
-1	-1	3
-1	1	1
1	-1	1
2	0	-1
3	-1	-1

Gráfica

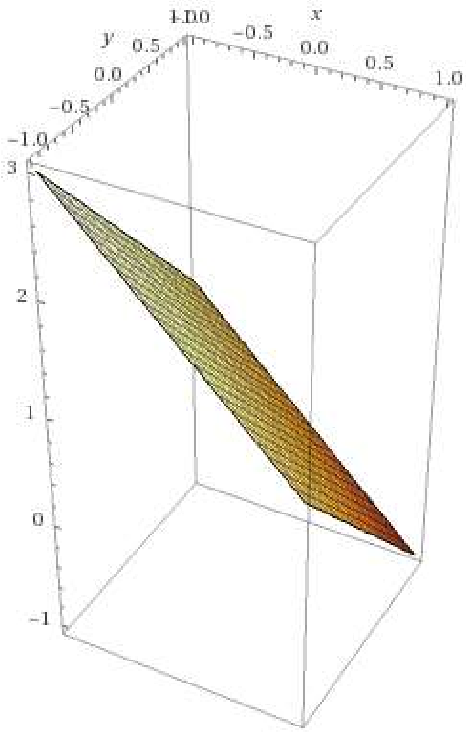
Un plano….ec. de un plano?

$z = 1 - x - y$

Geometric figure:

plane

3D plot:

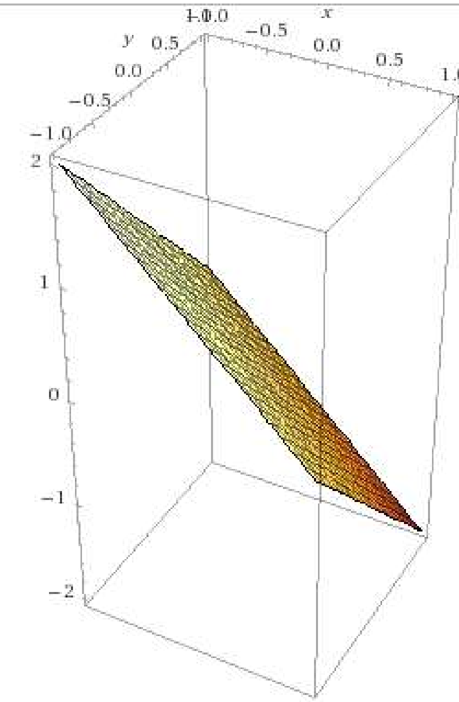


Alternate forms:

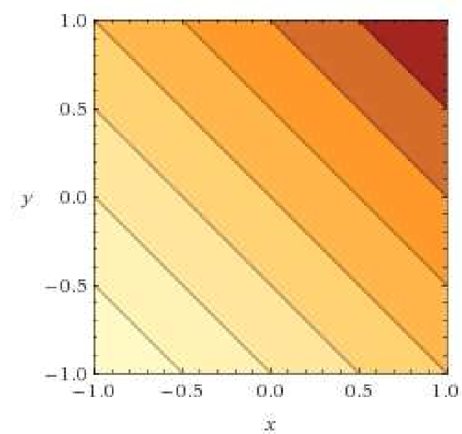
$x + y + z = 1$

$x + y + z - 1 = 0$

- Ec vectorial o ec escalar?
- Ec. De una línea recta…..



Contour plot:



Alternate form:

$x + y + z = 0$

Campos escalares. Ejemplo 2

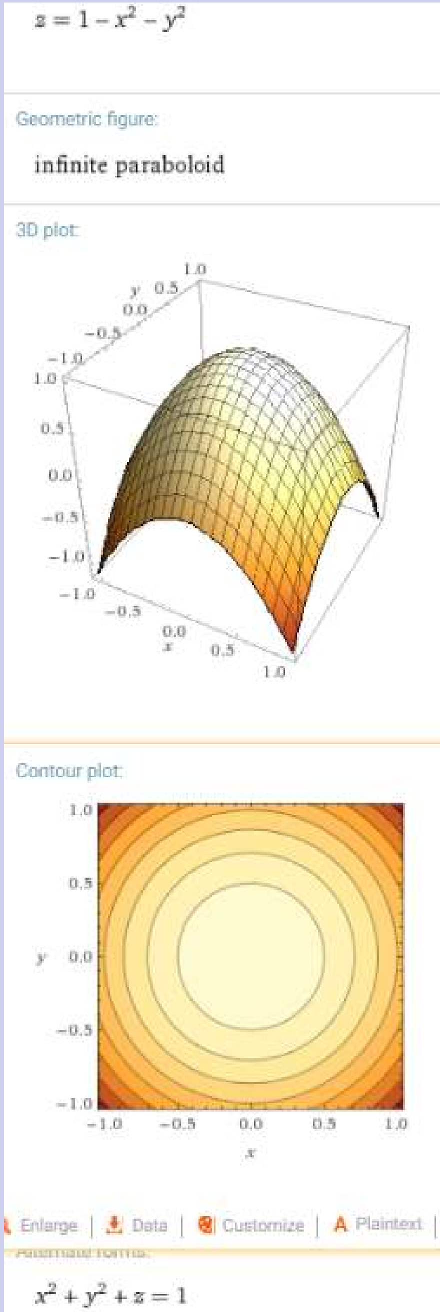
$$f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \qquad f\left(x,y\right)=z=1-x^2-y^2$$

$$\text{Gráfica}=\left\{\left(x,y,z\right)\middle|z=1-x^2-y^2\right\}$$

x	*Y*	*f(x,y)=1-x²-y²*
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	-1
-1	-1	-1
2	3	-12
-4	5	-40

Gráfica

Una superficie …… 2D?



- Ec vectorial o ec escalar?
- Ec. De una curva…..

Campos escalares. Ejemplo 3

$$\mathrm{E} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$$

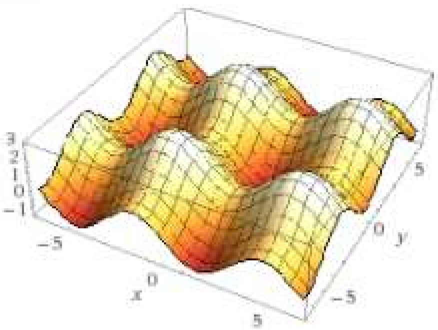
$$\mathrm{E}\left(x, y\right) = z = 1 - \sin x - \cos y$$

$$\text{Gráfica} = \left\{\left(x, y, z\right) \middle| z = 1 - \sin x - \cos y\right\}$$

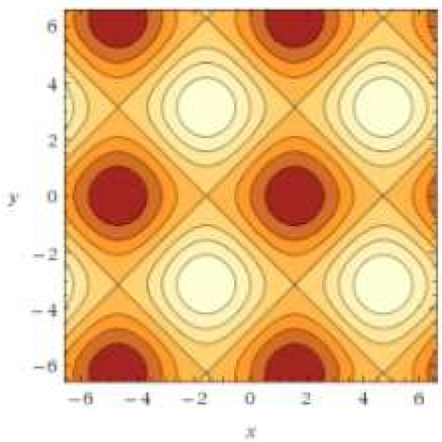
Una superficie 2D

$z = 1 - \sin(x) - \cos(y)$

3D plot:



Contour plot:



Enlarge | Data | Customize | Plaintext

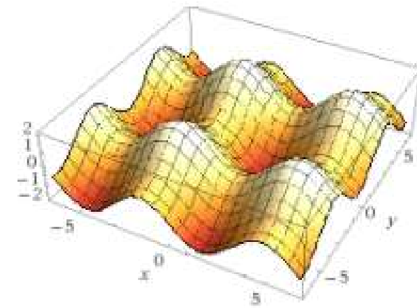
$\sin(x) + \cos(y) + z = 1$

$$z = -\frac{1}{2}\, i\, e^{-i x} + \frac{1}{2}\, i\, e^{i x} - \frac{e^{-i y}}{2} - \frac{e^{i y}}{2} + 1$$

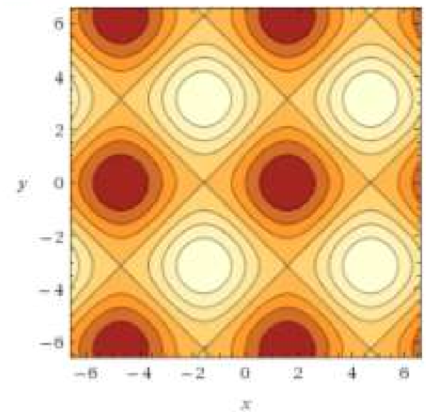
- Ec. de curvas en 1D…..

$z = -\sin(x) - \cos(y)$

3D plot:



Contour plot:



Alternate forms:

$\sin(x) + \cos(y) + z = 0$

$$z = -2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = -\frac{1}{2}\, i\, e^{-i x} + \frac{1}{2}\, i\, e^{i x} - \frac{e^{-i y}}{2} - \frac{e^{i y}}{2}$$

Campos escalares en 3D

$$\psi(x, y, z) = x + y + z$$

$$\chi(x, y, z) = \sin x + \cos y + \sin z$$

$$s(x, y, z) = x^2 y^3 z$$

Campos vectoriales

$$\vec{F}:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

A cada elemento de $\mathbb{R}^3$,

es decir, a cada vector,

se le asocia un vector de $\mathbb{R}^3$,

$$\vec{x} \rightarrow \vec{F}\left(\vec{x}\right)$$

Campos vectoriales

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = \left(F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), F_3(\vec{x})\right)$$

Cada una de las componentes del campo vectorial $\vec{F}(\vec{x})$ es una función de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Es decir, cada una de las componentes del campo vectorial es un campo escalar.

$$F_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad i = 1,\ldots,3$$

Campos vectoriales. Ejemplo 1

$$\vec{F} : R^2 \to R^2 \qquad \vec{x} \to \vec{F}\left(\vec{x}\right) = \left(x + y, y - x\right)$$

x	*Y*	*x+y*	*y-x*
0	0	0	0
1	0	1	-1
0	1	1	1
1	1	2	0
-1	-1	-2	0
-1	1	0	2
1	-1	0	-2
2	0	2	-2
3	-1	2	-4

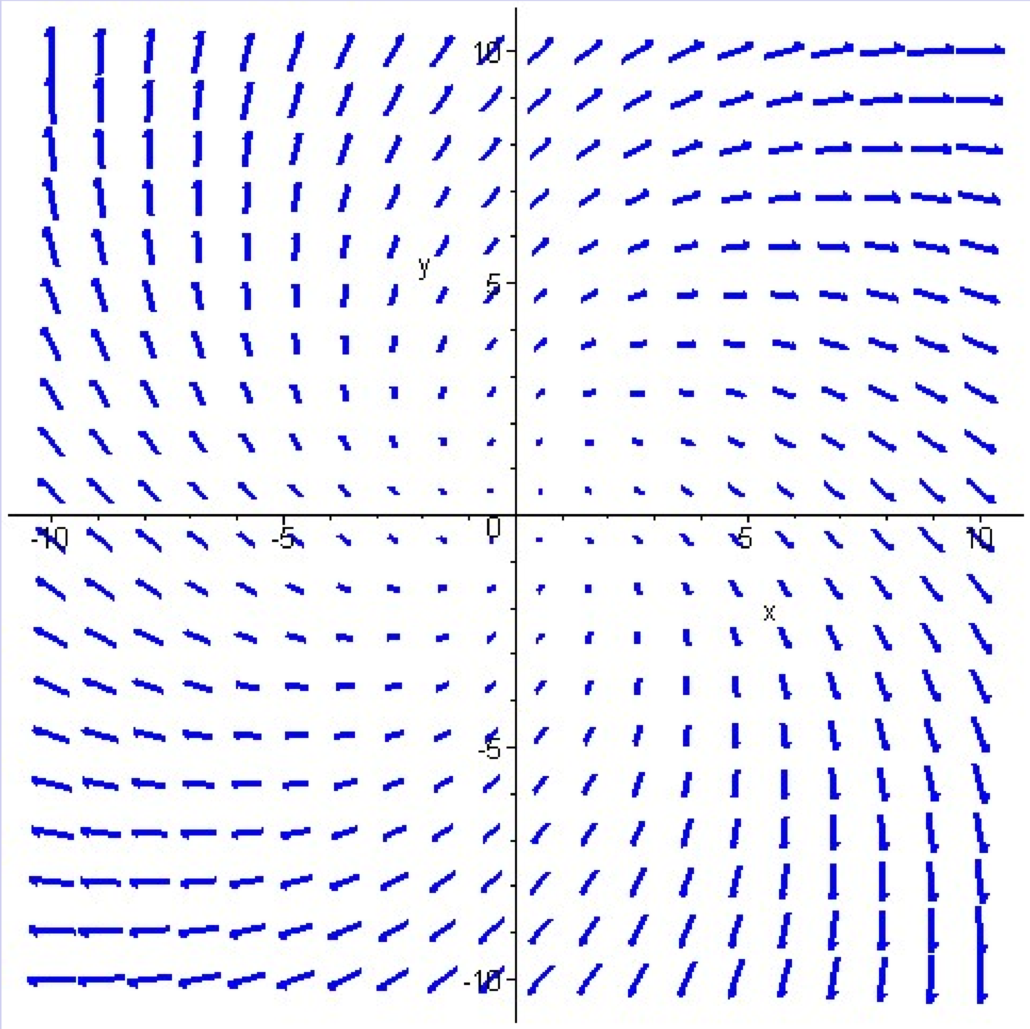
Campos vectoriales. Ejemplo 1

$$\vec{F}: R^2 \to R^2 \qquad \vec{x} \to \vec{F}\left(\vec{x}\right) = \left(x+y, y-x\right)$$

(x,y)	*F(x,y)*
(0,0)	(0,0)
(1,0)	(1,-1)
(0,1)	(1,1)
(1,1)	(2,0)
(-1,-1)	(-2,0)
(-1,1)	(0,2)
(1,-1)	(0,-2)
(2,0)	(2,-2)
(3,-1)	(2,-4)

Campos vectoriales. Ejemplo 1

$$\vec{F}: R^2 \to R^2 \qquad \vec{x} \to \vec{F}\left(\vec{x}\right) = \left(x+y, y-x\right)$$



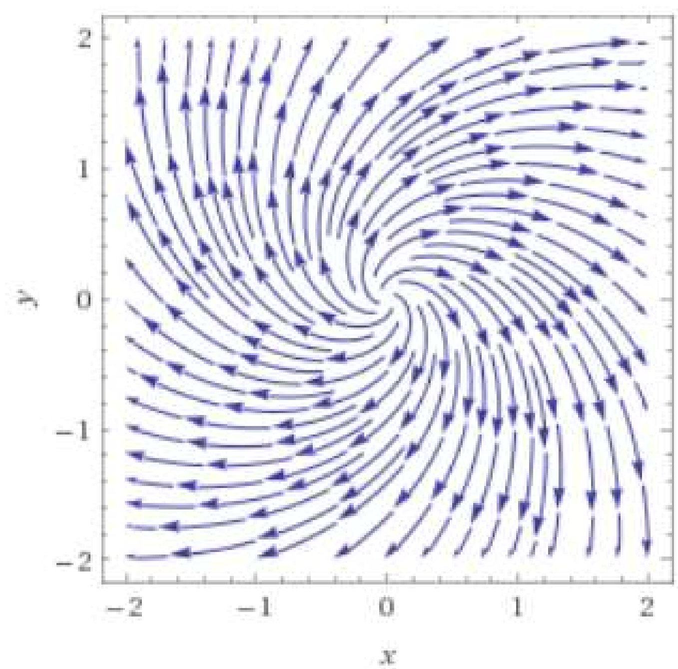
Campos vectoriales. Ejemplo 1

streamplot[{x+y,y-x},{x,-2,2},{y,-2,2}]

Input interpretation:

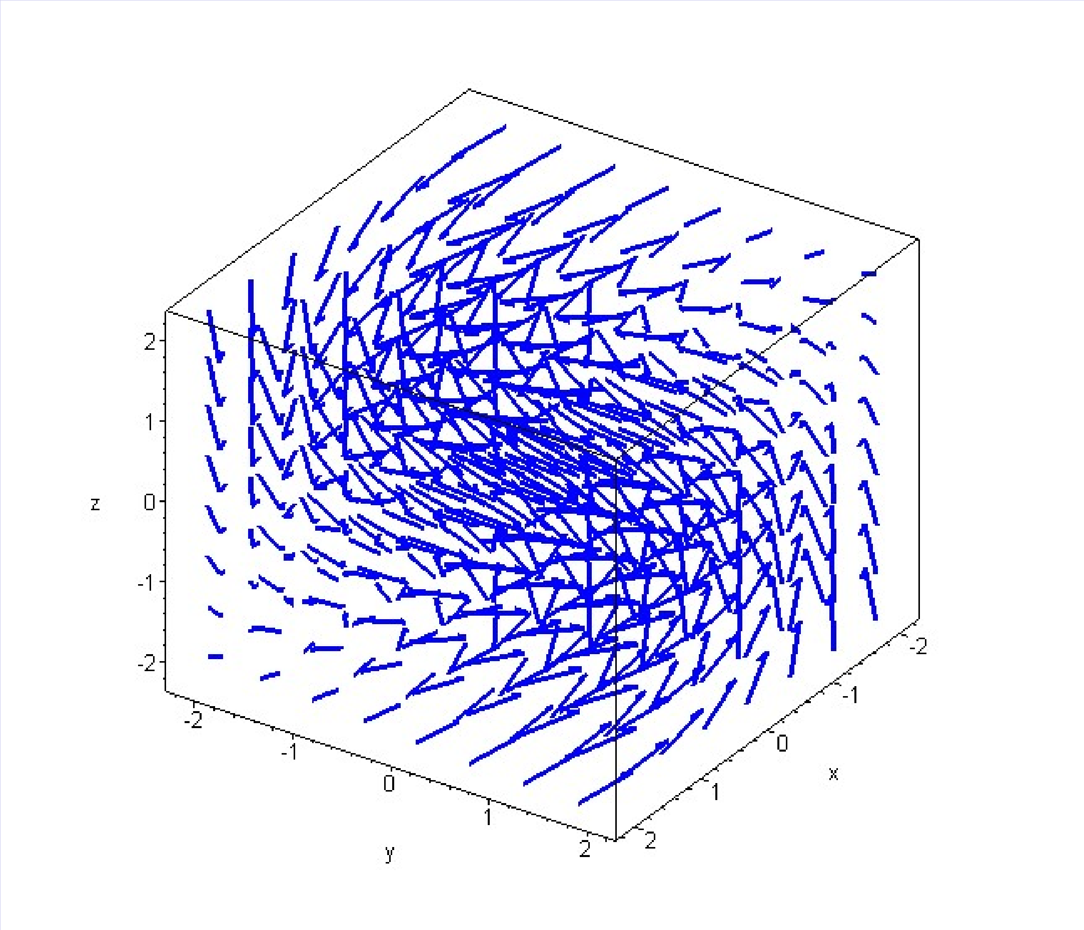
stream plot	$(x+y, -x+y)$	$x = -2$ to 2 $y = -2$ to 2

Plot:



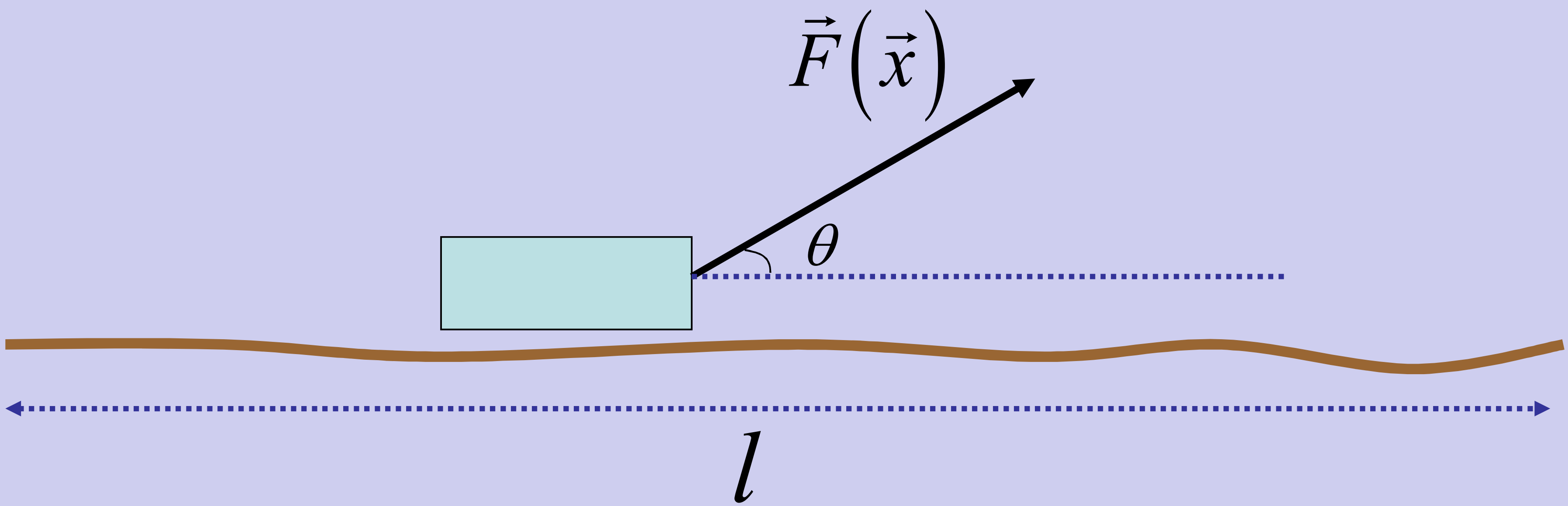
Campos vectoriales. Ejemplo 2

$$\vec{F}: R^3 \to R^3; \quad \vec{F}(\vec{x}) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$$



Fin del repaso de cálculo vectorial

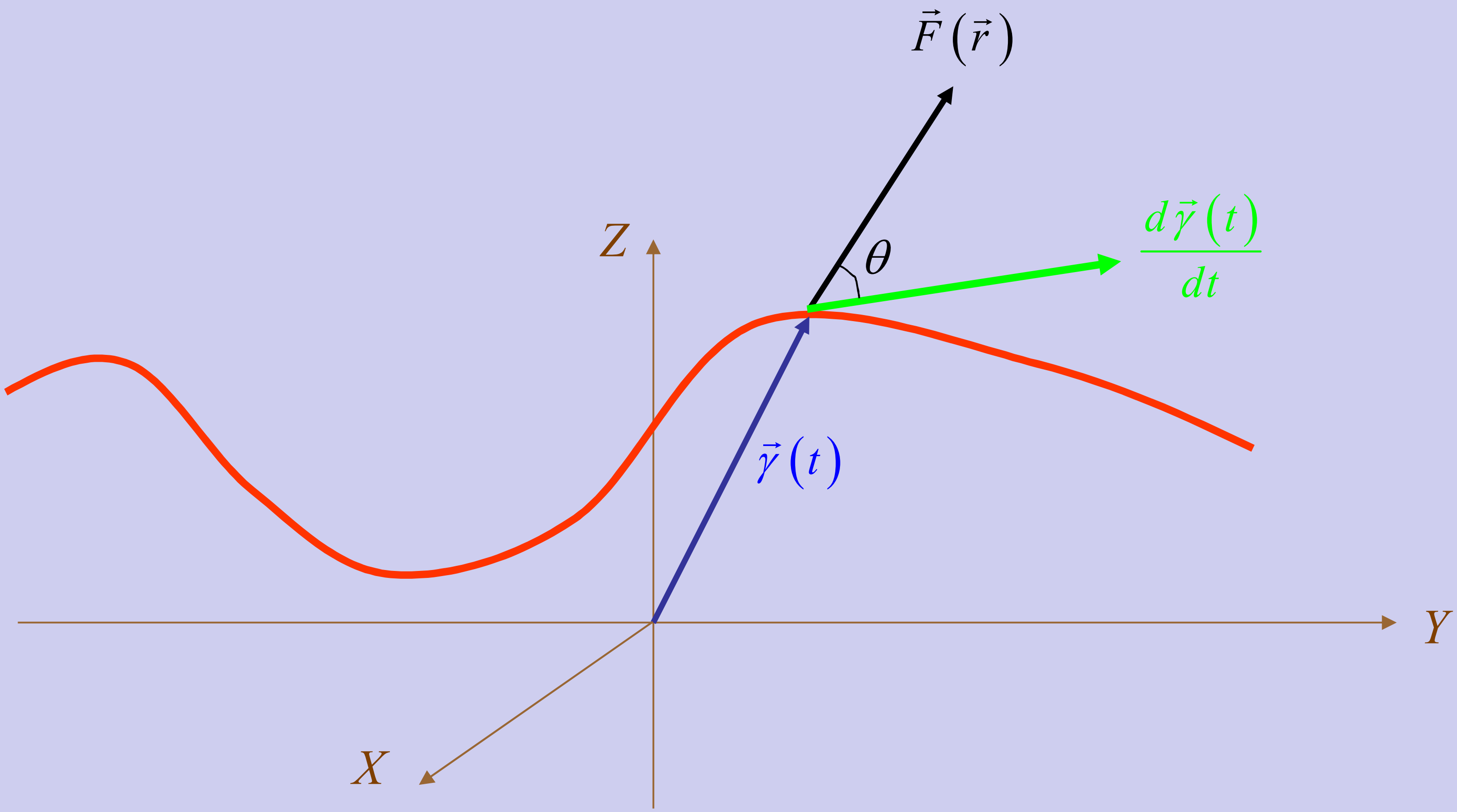
El trabajo hecho por una fuerza variable



$$W = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}\left(\vec{x}_i\right)\cdot\Delta\vec{l}_i = \int \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

El trabajo

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



El trabajo hecho por una fuerza variable

$$\boxed{W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

$$\vec{F} = \left(F_x, F_y . F_z\right) \ ; \qquad d\vec{l} = \left(dx, dy, dz\right)$$

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y \, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z \, dz$$

El trabajo

¡¡¡El trabajo, en general, depende de la trayectoria!!!

La energía cinética

La energía cinética

La energía cinética de un cuerpo es una energía que surge en el fenómeno del movimiento.

Se define como el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa dada desde su posición de equilibrio hasta una velocidad dada.

La energía cinética

Es el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa dada desde su posición de equilibrio hasta una velocidad dada:

$$K \triangleq W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt =$$

$$= \int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt$$

note que

$$\frac{d}{dt}(v.v) = \frac{dv}{dt}.v + \text{v}.\frac{dv}{dt} = 2\frac{dv}{dt}.\text{v}$$

$\therefore$

$$K \triangleq W = m\frac{1}{2}\int\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})dt = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} =$$

$$= \frac{1}{2}m\left|\vec{v}\right|^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

La energía cinética

Es el trabajo necesario para acelerar un cuerpo de una masa dada desde su posición de equilibrio hasta una velocidad dada:

$$K \equiv \frac{1}{2} m \left|\vec{v}\right|^2$$

La energía cinética

$$K \equiv \frac{1}{2} m \left| \vec{v} \right|^2$$

Una vez conseguida esta energía durante la aceleración, el cuerpo mantiene su energía cinética.

Un trabajo negativo de la misma magnitud podría requerirse para que el cuerpo regrese a su estado de equilibrio.

La energía cinética

$$K \equiv \frac{1}{2} m \left| \vec{v} \right|^2$$

$\Rightarrow$ La energía cinética es una cantidad escalar.

$\Rightarrow$ Sus unidades son las mismas que las del trabajo, Joules y Ergios.

La energía cinética

TABLE 7.1 Kinetic Energies for Various Objects

Object	Mass (kg)	Speed (m/s)	Kinetic Energy (J)
Earth orbiting the Sun	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.65×10^{33}
Moon orbiting the Earth	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Rocket moving at escape speed[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automobile at 55 mi/h	2 000	25	6.3×10^{5}
Running athlete	70	10	3.5×10^{3}
Stone dropped from 10 m	1.0	14	9.8×10^{1}
Golf ball at terminal speed	0.046	44	4.5×10^{1}
Raindrop at terminal speed	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Oxygen molecule in air	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

La energía cinética

$$W = \int \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m \frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

$$= m \int_{v_i}^{v_f} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Teorema del trabajo y la energía cinética

Si una fuerza externa actua sobre una partícula, causando que su energía cinética cambie de K_i a K_f, entonces el trabajo mecánico está dado por

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Se deben incluir todas las fuerzas que hagan trabajo en la partícula en el cálculo del trabajo neto hecho.

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Con este teorema vemos que la velocidad de una partícula crece si el trabajo neto hecho en ella es positivo, porque la energía cinética final es mayor que la energía cinética inicial.

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

La velocidad de una partícula decrece si el trabajo neto hecho en ella es negativo, porque la energía cinética final es menor que la energía cinética inicial.

Teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K \equiv \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Este teorema nos permite pensar en la energía cinética como en el trabajo que puede hacer la partícula cuando llegue al reposo, o como la cantidad de energía almacenada en la partícula.

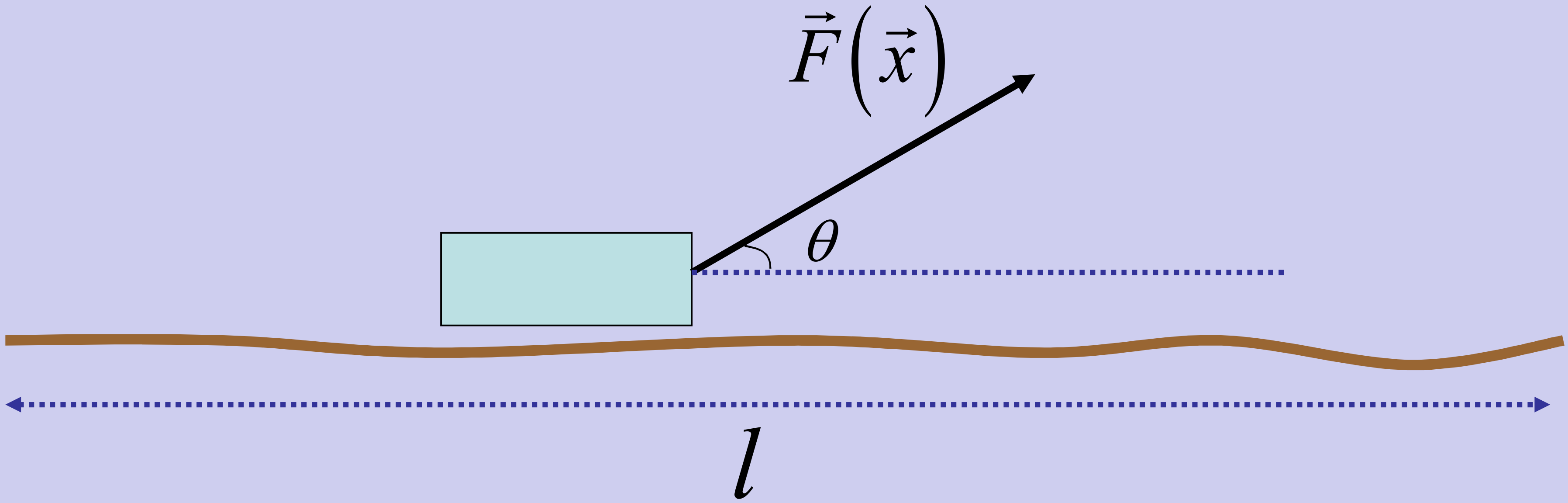
Potencia

En Física, la **potencia** *P* es la cantidad de trabajo efectuado por unidad de tiempo.

Esto es equivalente a la velocidad de cambio de energía en un sistema o al tiempo empleado en realizar un trabajo; es decir,

$$P \equiv \frac{dW}{dt}$$

El trabajo hecho por una fuerza variable



$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Potencia instantánea

$$P \equiv \frac{dW}{dt}$$

De la definición del trabajo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

entonces

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Potencia instantánea

$$P \equiv \frac{dW}{dt}$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Potencia

$$P \equiv \frac{dW}{dt}$$

La unidad de potencia en el SI
es el Joule/segundo,
llamado Watt y denotado W.
Se tiene

$$1\,W = 1\,J/s = 1\,kg \cdot m^2/s^3$$