Vectores

Dr. Rogerio Enríquez

Objetivo Educativo

- Reflexión sobre lo que ya se sabe
- Dominar los conceptos como maestros
- Unir la geometría con el álgebra
- Deducir lógicamente el álgebra
- Explorar el dominio matemático

Lo que se sabe

- ¿De dónde proviene el concepto de vector?
- Donde se han usado
- Significado universal
- Campo Vectorial
- Espacio Vectorial

Axiomas sobre la adición y multiplicación

- Axiomas de CAMPO
- Cualquier conjunto que cumpla será un campo
- Propiedades de CAMPO:
  - Leyes conmutativas
  - Leyes asociativas
  - Leyes distributivas
  - Elemento idéntico para cada operación
  - Elementos inversos

Breviario Cultural

- Grupo: conjunto que tiene definida una operación y que es cerrado respecto a ella. Es asociativa. Existe el idéntico y el inverso.
- Grupo abeliano: operación además es conmutativa.
  (Idénticos e inversos por la derecha)
- Anillo: conjunto con dos operaciones. Forman grupo abeliano en una y w.r.t. la otra es cerrado, cumple con leyes asociativa y w.r.t. ambas existen leyes distributivas.
- Campo: anillo y si w.r.t. la segunda operación se forma un grupo abeliano.

Axiomas sobre la adición y multiplicación

$I.$ Leyes conmutativas $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$a+b=b+a$ $\qquad a \cdot b = b \cdot a$

$II.$ Leyes asociativas $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$a+(b+c)=(a+b)+c$ $\qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$III.$ Leyes distributivas $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \leftarrow izquierda$

$(b+c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a) \leftarrow derecha$

$IV.$ Elemento idéntico $\forall a \in \mathbb{R}$

aditivo $\exists\ e \in \mathbb{R}$ *denotado* $0 \ni a+0=a=0+a$

multiplicativo denotado $1 \ni a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$

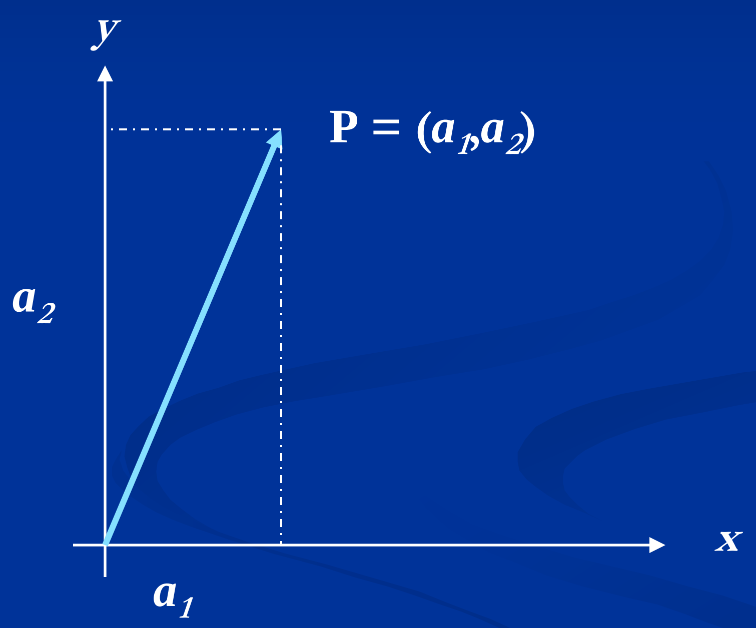
$V.$*Elementos Inversos* $\forall a \in \mathbb{R}$

aditivos $\exists\ a' \in \mathbb{R}$ *denotado* $-a \ni a+(-a)=0=(-a)+a$

multiplicativos $\forall\ a \neq 0$ *denotado* $a^{-1} \ni a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$

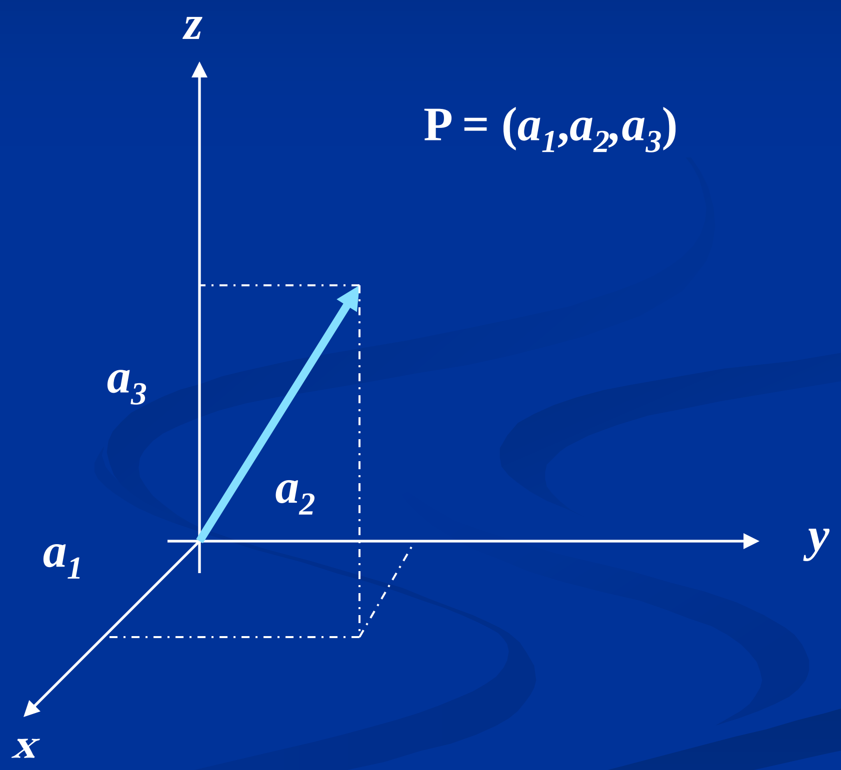
Vectores en 2D y 3D

- Los puntos P en el plano se representan por pares ordenados de números reales
  - (a_1, a_2)
- Los números a_1 y a_2 se llaman **coordenadas cartesianas** de P
- ¿Par Ordenado?



Vectores en 2D y 3D

- Los puntos P en el espacio se representan por ternas ordenadas de números reales
  - (a_1, a_2, a_3)
- Los números a_1, a_2 y a_3 se llaman **coordenadas cartesianas** de P
- ¿Triada ordenada?



Lo que se sabe

- Campo Vectorial
  - Concepto de campo
- Espacio Vectorial
  - Asociación de puntos en el espacio y el campo vectorial

$$\mathrm{E}: V \rightarrow \mathbf{V}$$

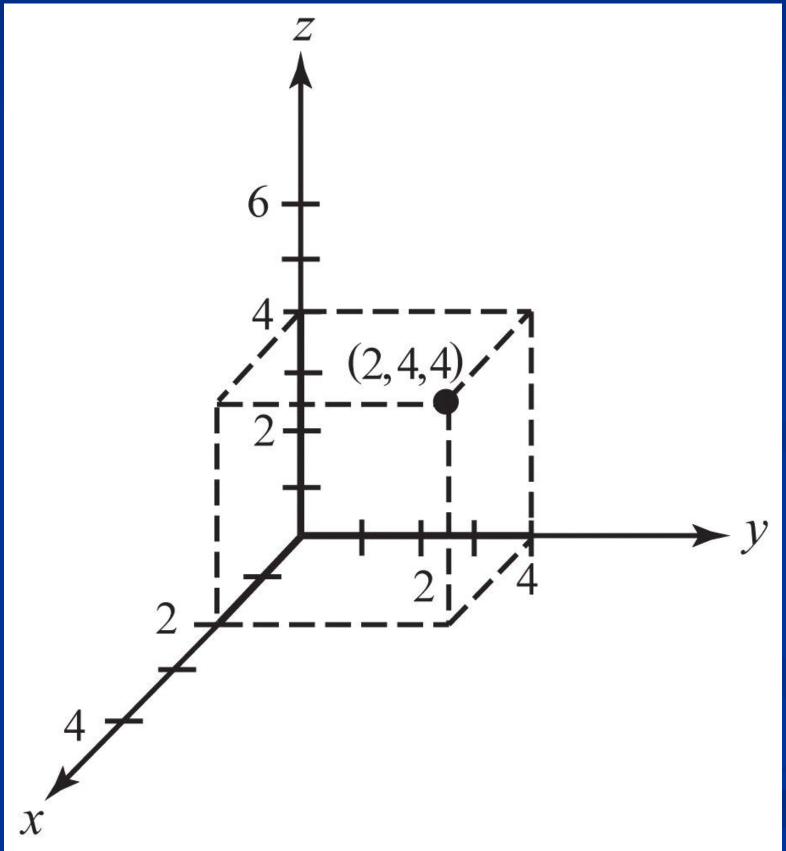
V es el conjunto de puntos en el espacio

$\mathbf{V}$ es el campo vectorial

Notación

- Se empleará la siguiente notación:
  - La recta de los números reales es denotada por $\mathbb{R}$
  - El conjunto de los pares ordenados (x,y) es denotado por $\mathbb{R}^2$
  - El conjunto de las ternas ordenadas (x,y,z) es denotado por $\mathbb{R}^3$
  - ¿Qué otros espacios vectoriales?

Representación geométrica del punto (2,2,4)



Suma Vectorial y Multiplicación por un Escalar

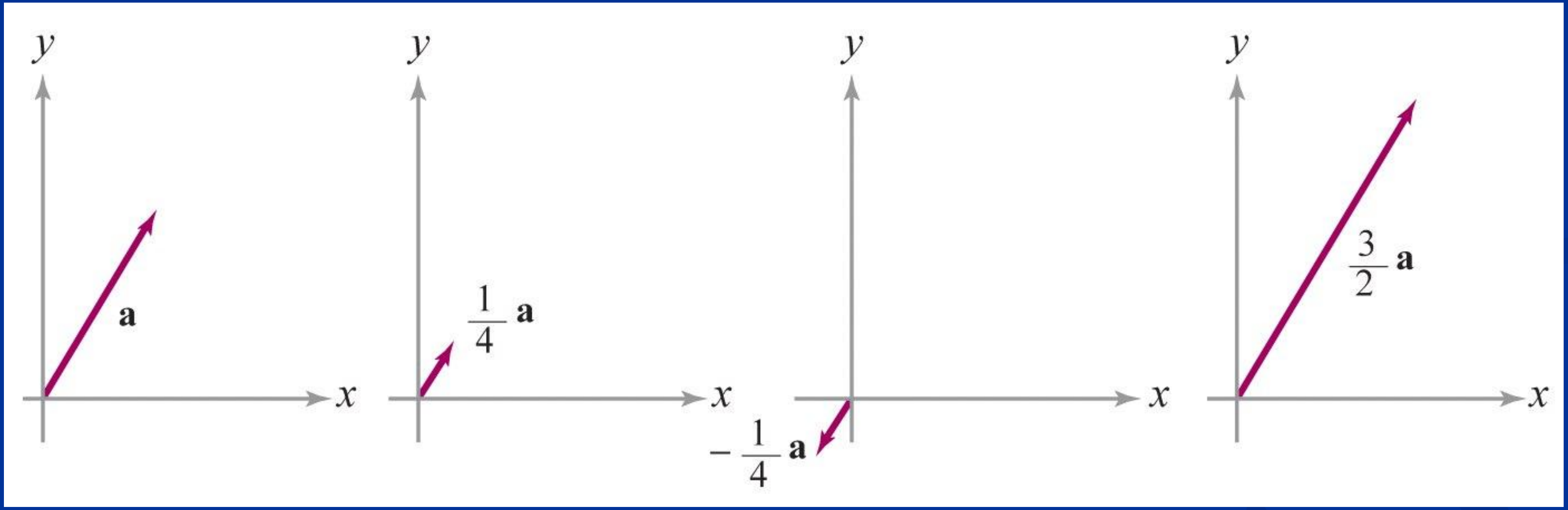
- Dadas dos ternas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) definimos la ***suma vectorial*** como

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

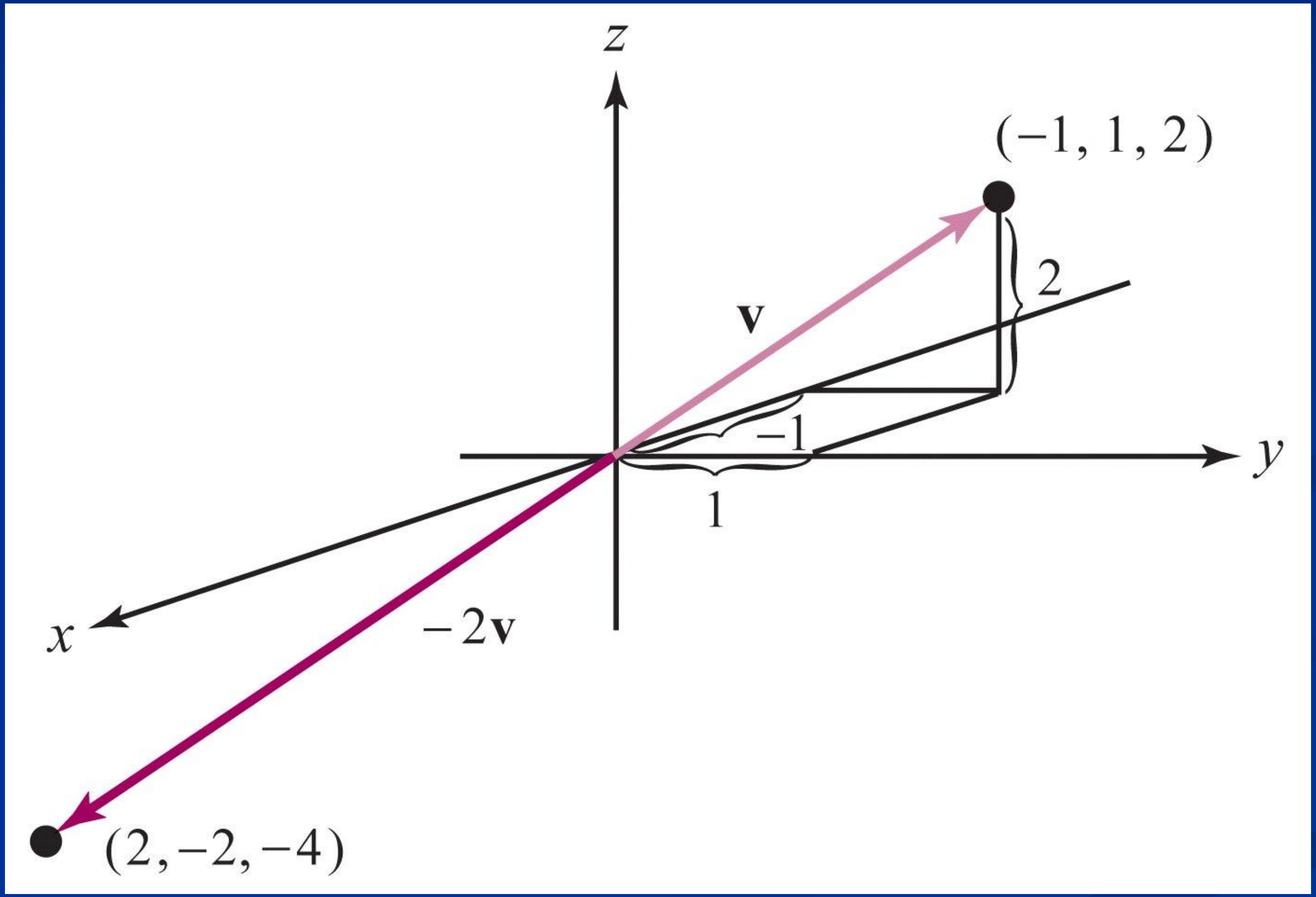
- Dadas un escalar α y un vector (a_1, a_2, a_3) definimos el ***producto escalar*** por medio de

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Interpretación Geométrica Multiplicación Escalar por un Vector



Multiplicación de (-1,1,2) por -2



Propiedades de los Vectores

- Elemento cero

$$\left(0,0,0\right)$$

- Inverso aditivo $\left(a_1, a_2, a_3\right)$

$$\left(-a_1,-a_2,-a_3\right)$$

Propiedades de la Suma y Multiplicación Escalar

$$1.\ (\alpha\beta)(a_1,a_2,a_3)=\alpha\left[\beta(a_1,a_2,a_3)\right]$$

$$2.\ (\alpha+\beta)(a_1,a_2,a_3)=\alpha(a_1,a_2,a_3)+\beta(a_1,a_2,a_3)$$

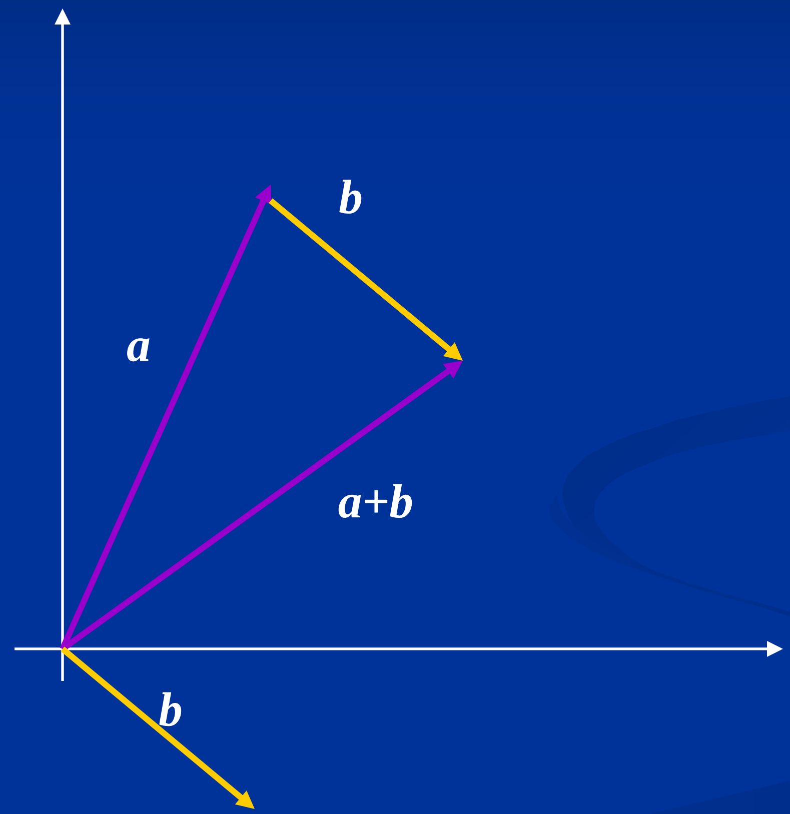
$$3.\ \alpha\left[(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)\right]=\alpha(a_1,a_2,a_3)+\alpha(b_1,b_2,b_3)$$

$$4.\ \alpha(0,0,0)=(0,0,0)$$

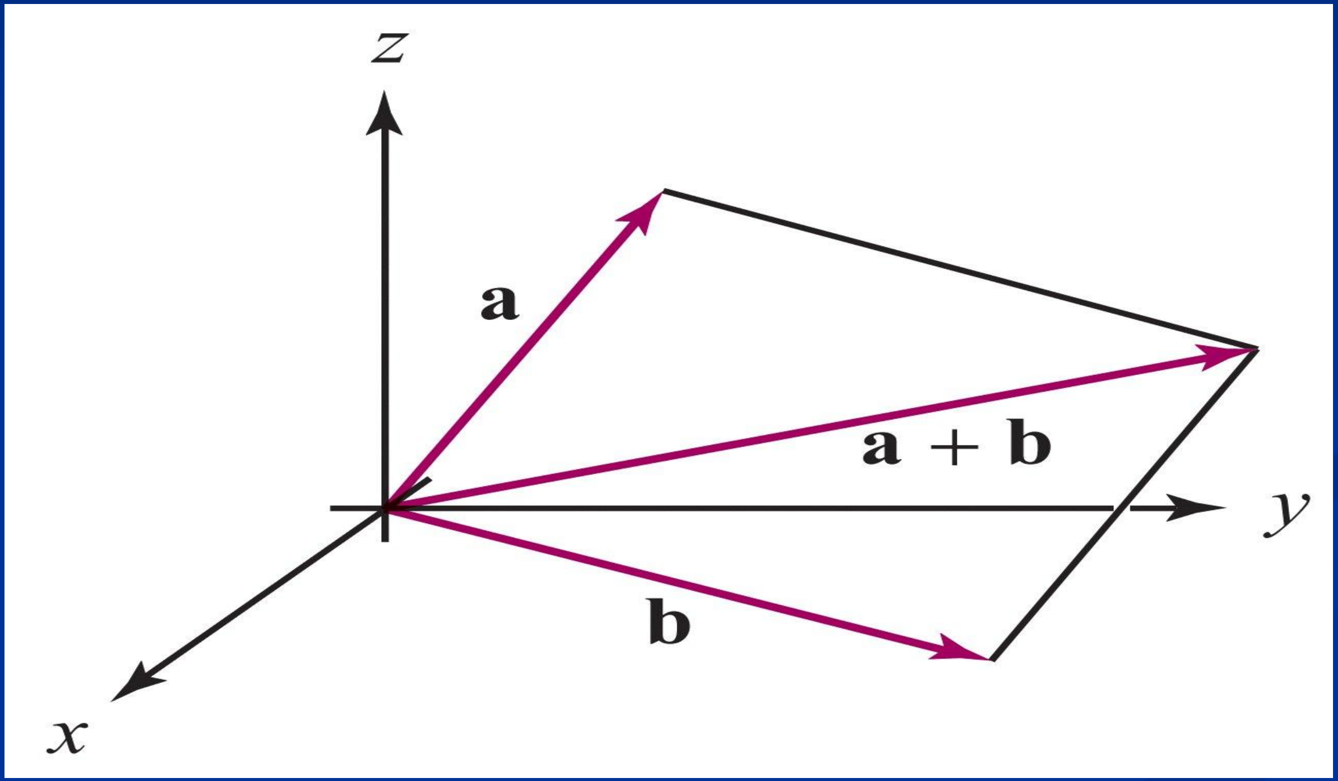
$$5.\ 0(a_1,a_2,a_3)=(0,0,0)$$

$$6.\ 1(a_1,a_2,a_3)=(a_1,a_2,a_3)$$

Suma de vectores (a)

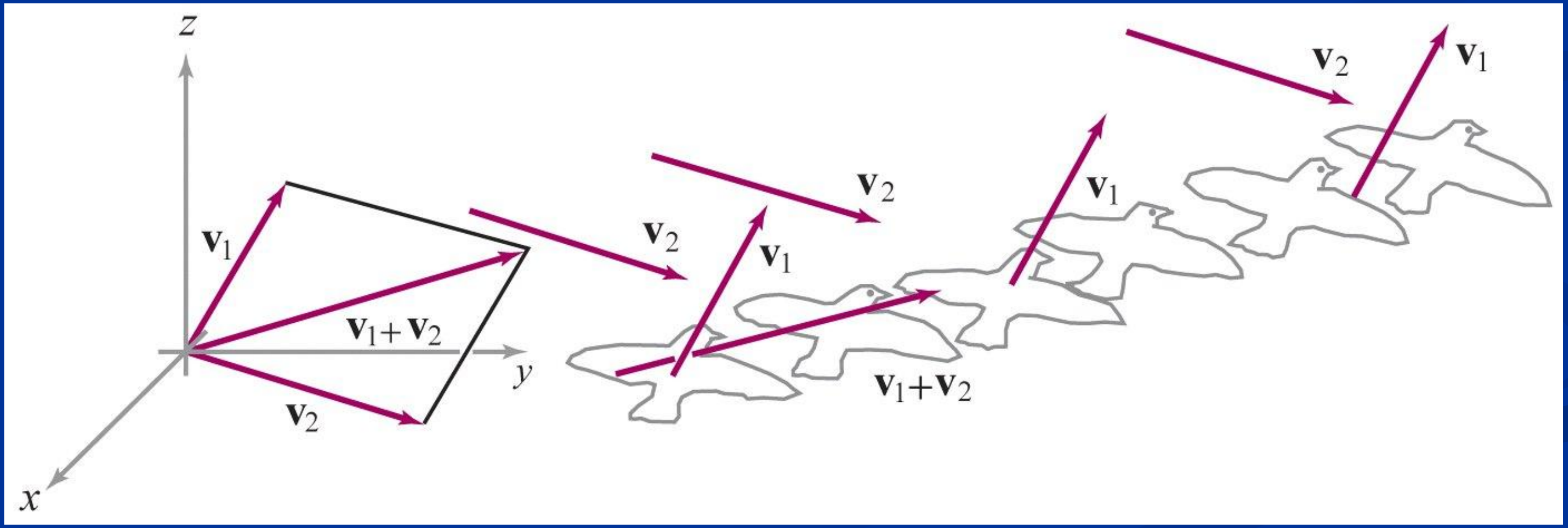


Suma de Vectores (b)



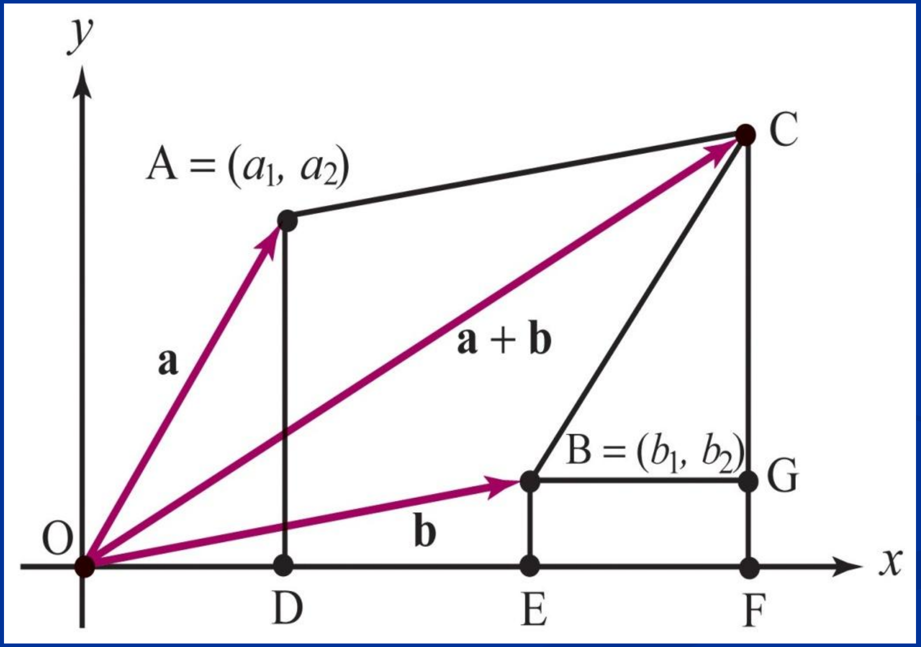
Suma de Velocidades

- Una ave volando con velocidad $\mathbf{v}_1$, velocidad el viento $\mathbf{v}_2$. Velocidad resultante $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$



Equivalencia Geométrica con Algebraica

- Equivalencia de la definición de suma vectorial en forma geométrica y algebraica.

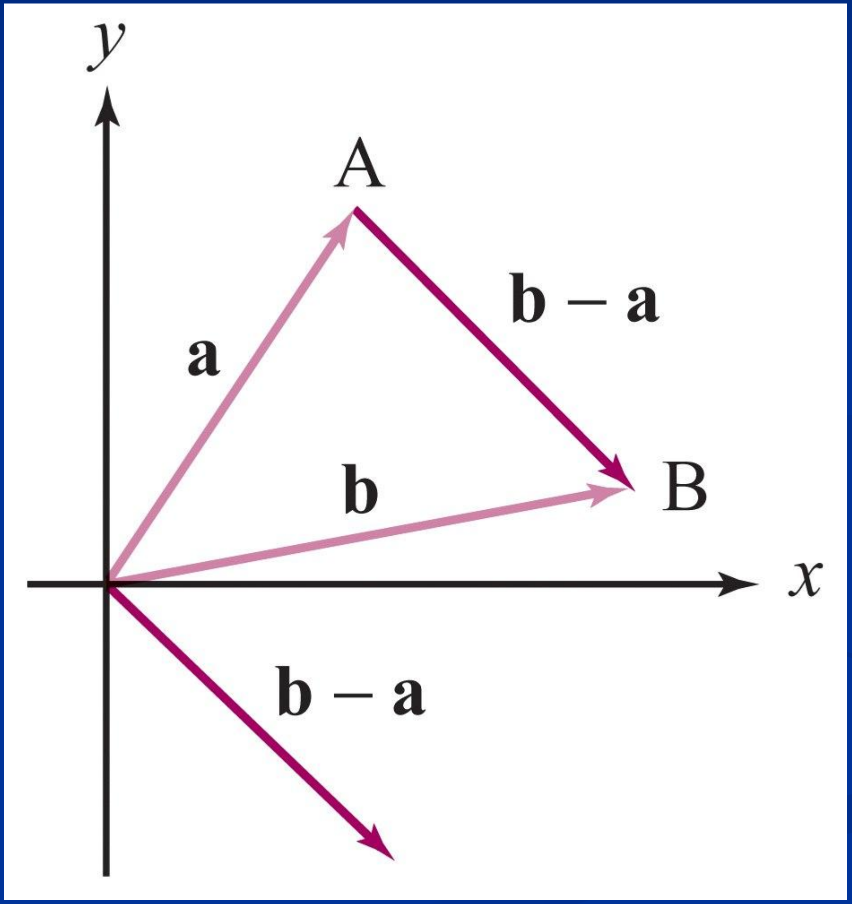


Los vectores son segmentos de recta dirigidos en [el plano o] el espacio representados por segmentos de recta dirigidos con un inicio (cola) y un final (punta). Los segmentos de recta que se obtienen uno de otro por traslación paralela (pero no rotación) representan el mismo vector.

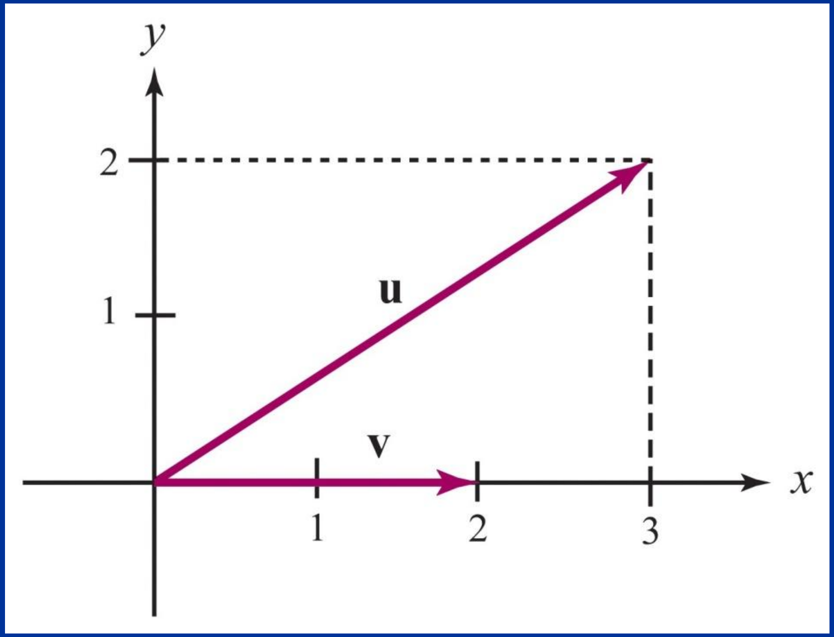
Las componentes (a_1,a_2,a_3) de a son las longitudes (dirigidas) de las proyecciones de a a lo largo de los tres ejes coordenados.

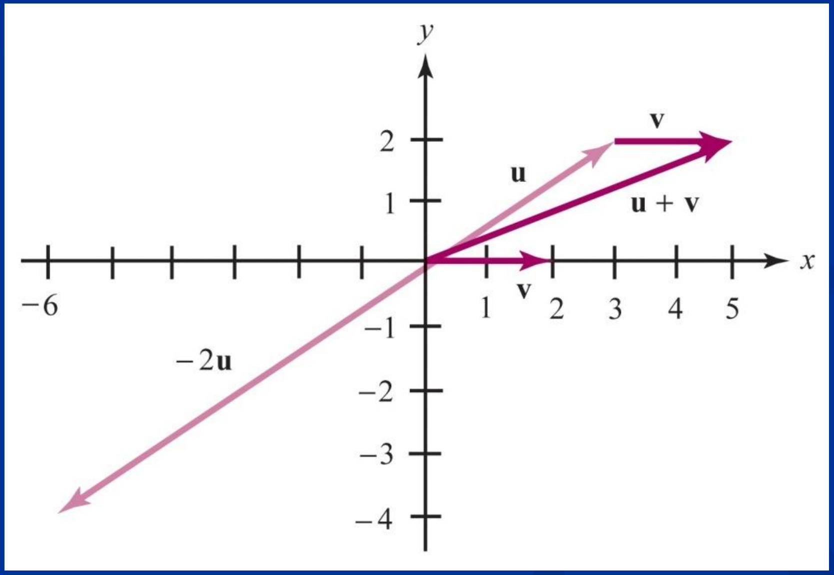
La suma de dos vectores se obtiene colocándolos final con inicio y trazando el vector que va del inicio al final del segundo.

Interpretación Geométrica de la Resta de Dos Vectores

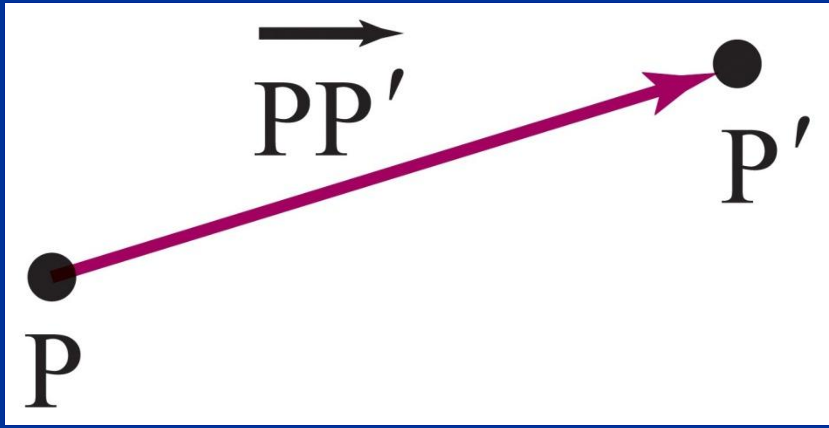


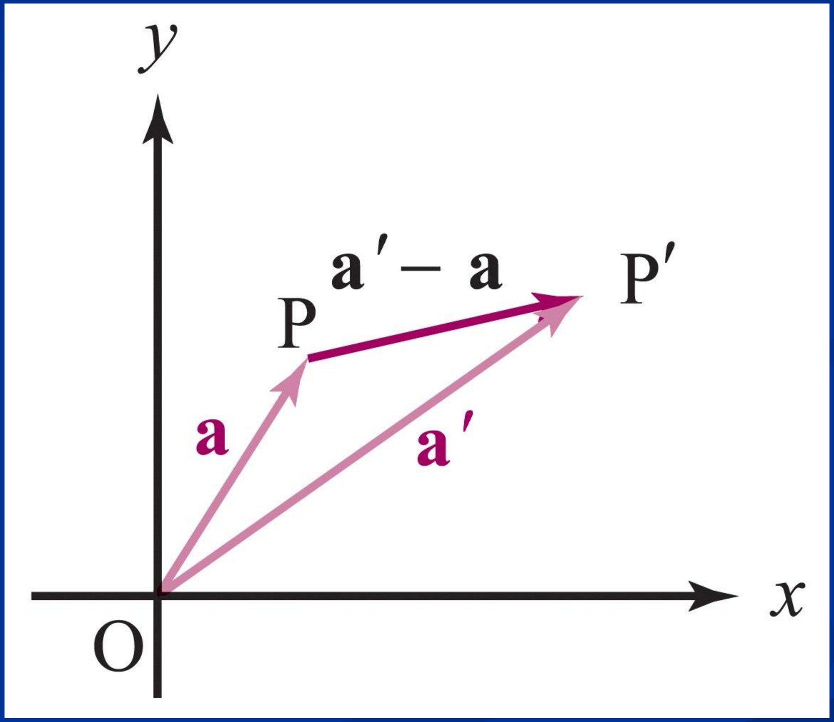
Suma de los Vectores u + v y -2u





Vector Que Une Dos Puntos





El Vector Que Une Dos Puntos

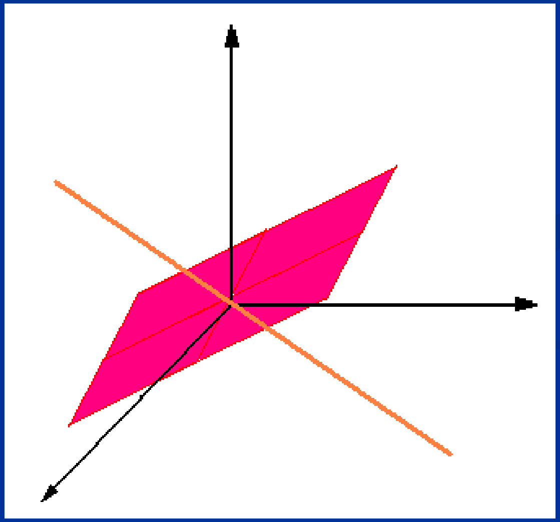
- Si el punto P tiene coordenadas (x, y, z) y P' tiene coordenadas (x', y', z') entonces el vector PP' de la punta de P a las punta de P' tiene componentes

$$\left(x'-x, y'-y, z'-z\right)$$

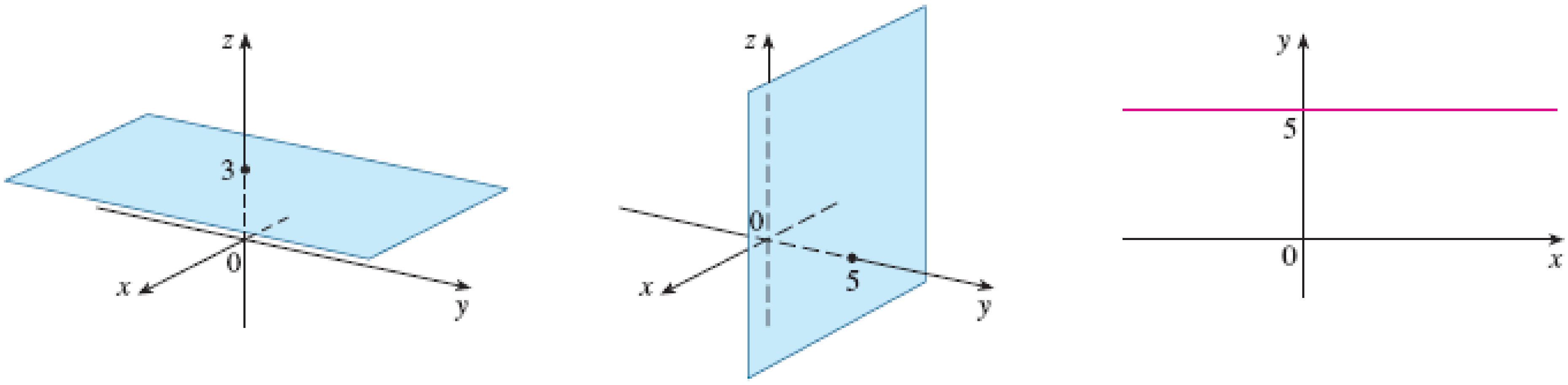
- ¡Translación!
- ¿Magnitud?

Vector spaces

- Formally, a *vector space* is a set of vectors which is closed under addition and scalar multiplication by real numbers.
- A *subspace* is a subset of a vector space which is a vector space itself, e.g. the plane z=0 is a subspace of R^3 (It is essentially R^2.).



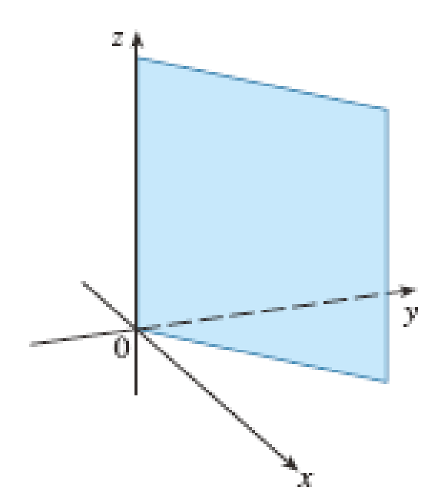
two algebraic operations are defined:
vector addition and *scalar multiplication*



(a) $z = 3$, a plane in $\mathbb{R}^3$

(b) $y = 5$, a plane in $\mathbb{R}^3$

(c) $y = 5$, a line in $\mathbb{R}^2$



Addition

I. Vector addition associates with every pair of vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ of V a unique vector of V, called the *sum* of $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ and denoted by $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, such that the following axioms are satisfied.

I.1 *Commutativity.* For any two vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ of V,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

I.2 *Associativity.* For any three vectors $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ of V,

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \qquad (\text{written } \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

I.3 There is a unique vector in V, called the *zero vector* and denoted by $\mathbf{0}$, such that for every $\mathbf{a}$ in V,

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}.$$

I.4 For every $\mathbf{a}$ in V there is a unique vector in V that is denoted by $-\mathbf{a}$ and is such that

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

Multiplication

II. Scalar multiplication. The real numbers are called **scalars.** Scalar multiplication associates with every $\mathbf{a}$ in V and every scalar c a unique vector of V, called the *product* of c and $\mathbf{a}$ and denoted by $c\mathbf{a}$ (or $\mathbf{a}c$) such that the following axioms are satisfied.

II.1 *Distributivity.* For every scalar c and vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ in V,

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}.$$

II.2 *Distributivity.* For all scalars c and k and every $\mathbf{a}$ in V,

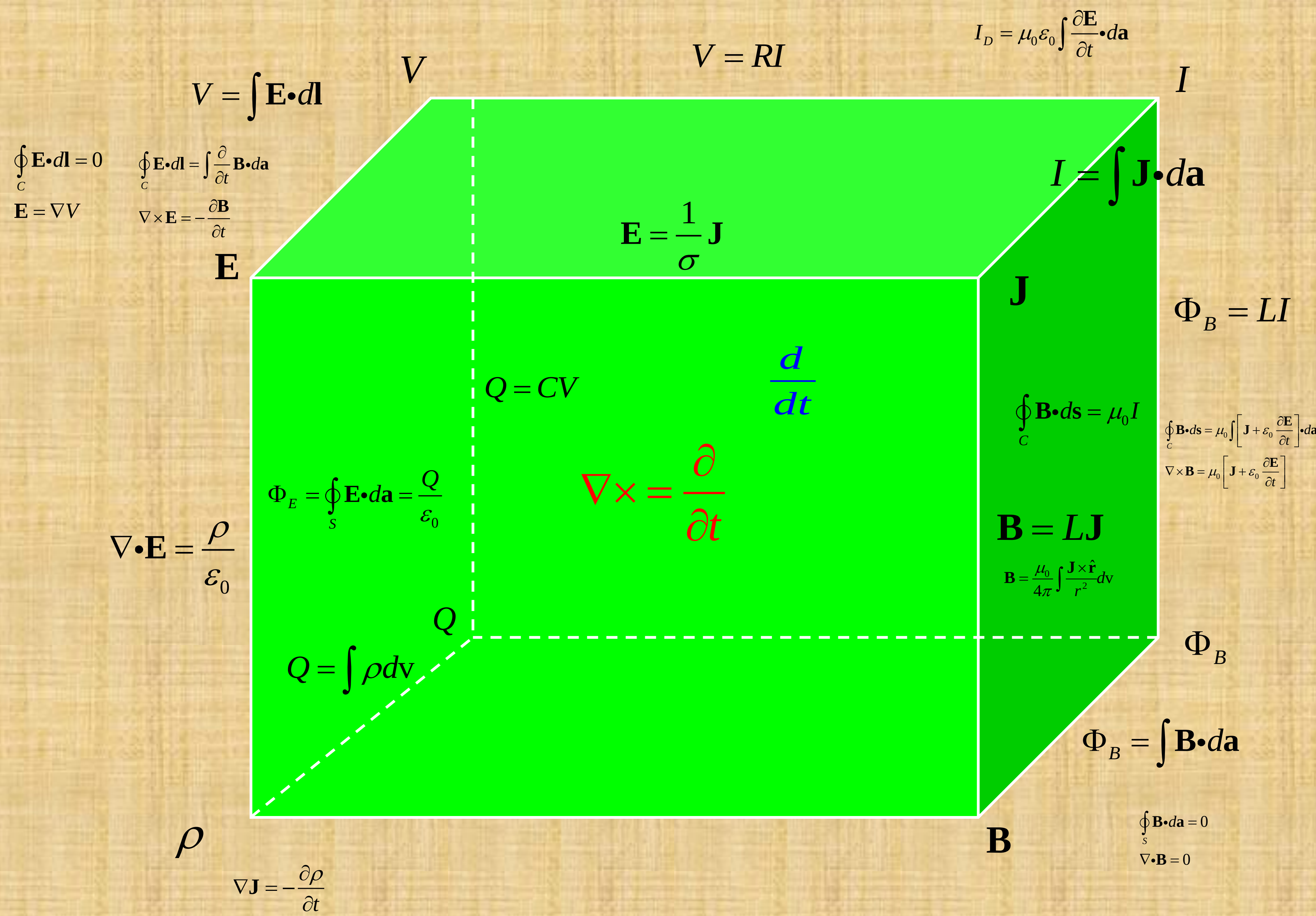
$$(c + k)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + k\mathbf{a}.$$

II.3 *Associativity.* For all scalars c and k and every $\mathbf{a}$ in V,

$$c(k\mathbf{a}) = (ck)\mathbf{a}$$

II.4 For every $\mathbf{a}$ in V,

$$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$



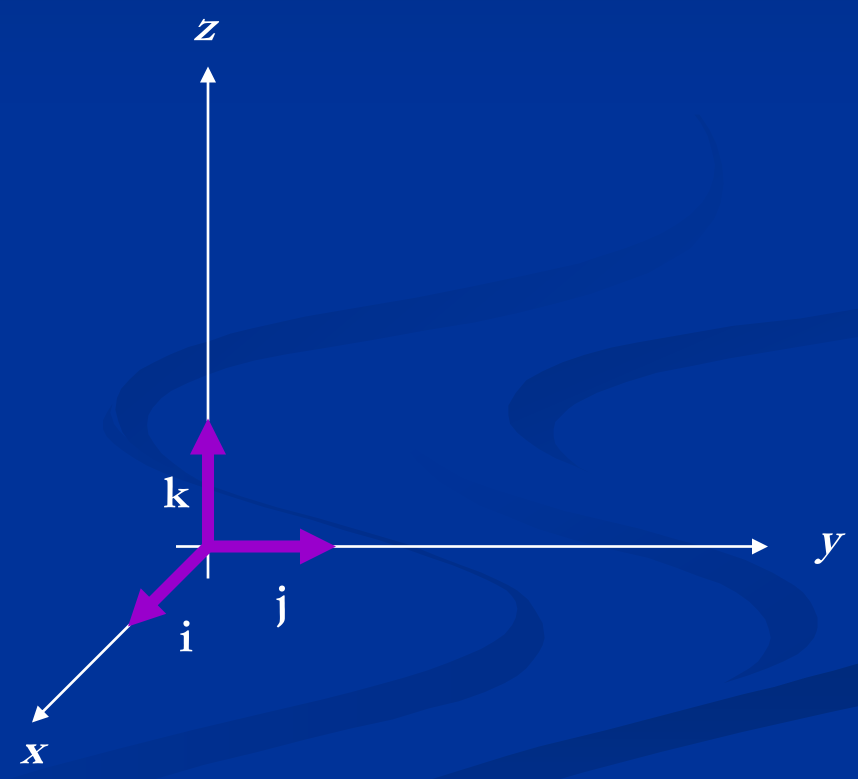
$I_D = \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$
$V = RI$
V
I
$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
$\mathbf{E} = \nabla V$
$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$
$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}$
$\mathbf{E}$
$\mathbf{J}$
$\Phi_B = LI$
$\frac{d}{dt}$
$Q = CV$
$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I$
$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int \left[\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{a}$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left[\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$
$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
$\nabla \times = \frac{\partial}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
$\mathbf{B} = L\mathbf{J}$
$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dv$
Q
Φ_B
$Q = \int \rho dv$
$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$
ρ
$\mathbf{B}$
$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

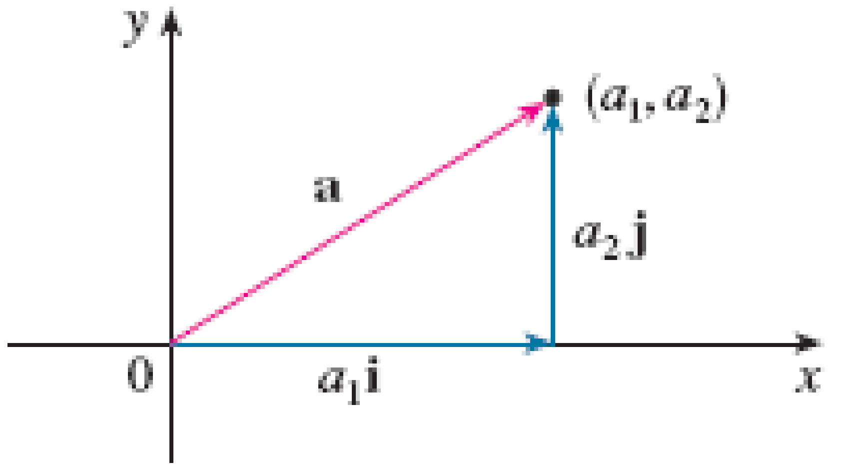
Base Canónica

- Existen tres vectores especiales a lo largo de los ejes *x*, *y*, *z*:
  - **i:** (1,0,0)
  - **J:** (0,1,0)
  - **k:** (0,0,1)
- Sea (a_1, a_2, a_3)

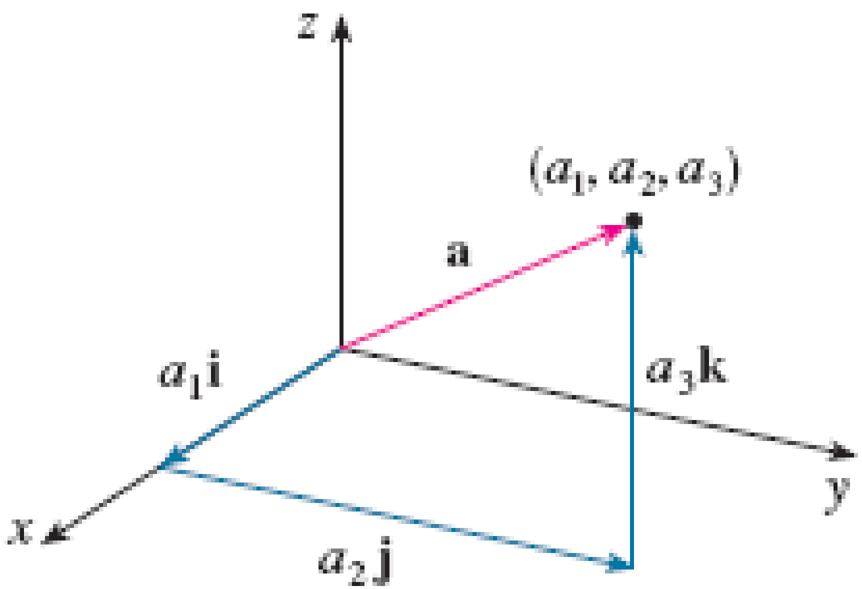
  entonces

  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$



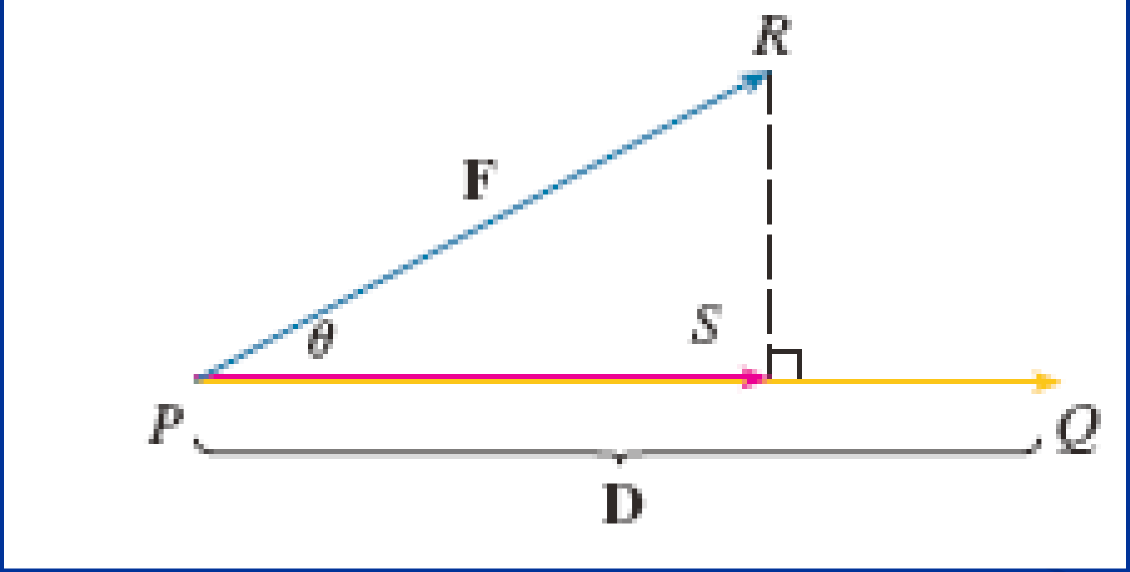


(a) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j}$



(b) $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$

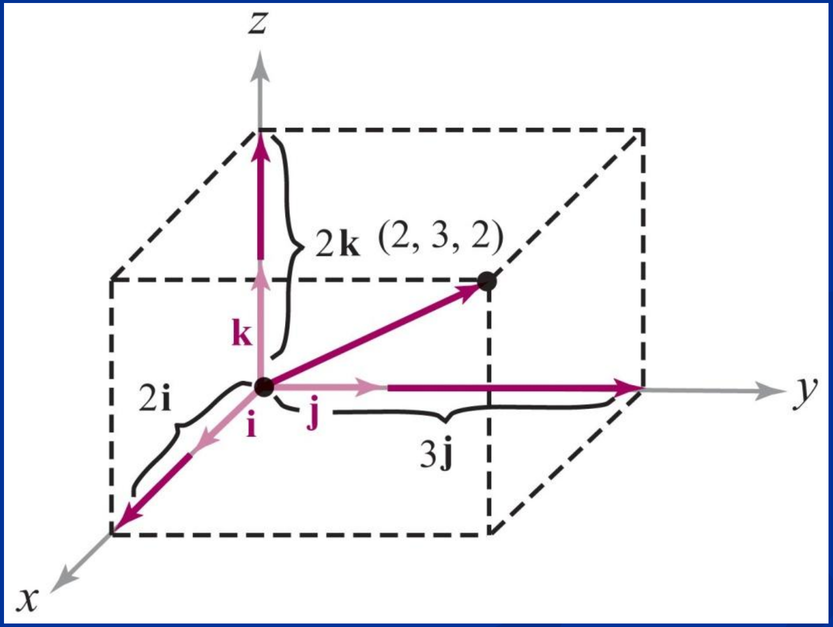
comparar



$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$

Base Canónica

- Representación del vector (2,3,2) en términos de la base canónica

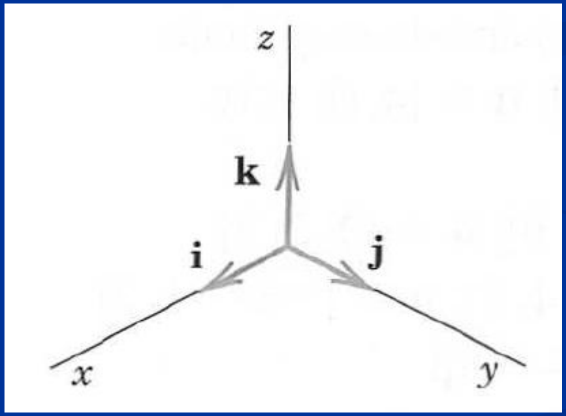


Example 1:

$$\mathbf{i} = [1, \quad 0, \quad 0], \qquad \mathbf{j} = [0, \quad 1, \quad 0], \qquad \mathbf{k} = [0, \quad 0, \quad 1]$$

standard basis of R^3

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3] = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$



Basis

A basis of a "n"dimensional vector space is a set of n vectors linearly independent inside the space

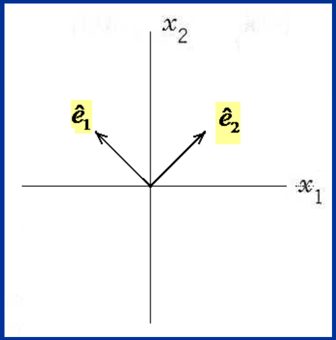
Let $\mathbf{e}_{(1)}, \cdots, \mathbf{e}_{(n)}$ be any basis for R^n

Then every $\mathbf{x}$ in R^n has a unique representation

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_{(1)} + \cdots + x_n\mathbf{e}_{(n)}$$

Example 2:

$$\{\hat{e}_1,\, \hat{e}_2\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$ *basis of* R^2



Another basis of R^2:

$$\{e_1,\, e_2\} = \{(4,1),\, (-1,4)\}$$

- Bases chuecas sistema de ecuaciones

Trabajo

- Producto Punto
- Relaciona el mundo de vectores con escalares
- Calculado con magnitud y dirección
- ¿Qué representa?

- con componentes?
- Consigo mismo
- Vector unitario

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

The dot product of $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ and $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ is

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

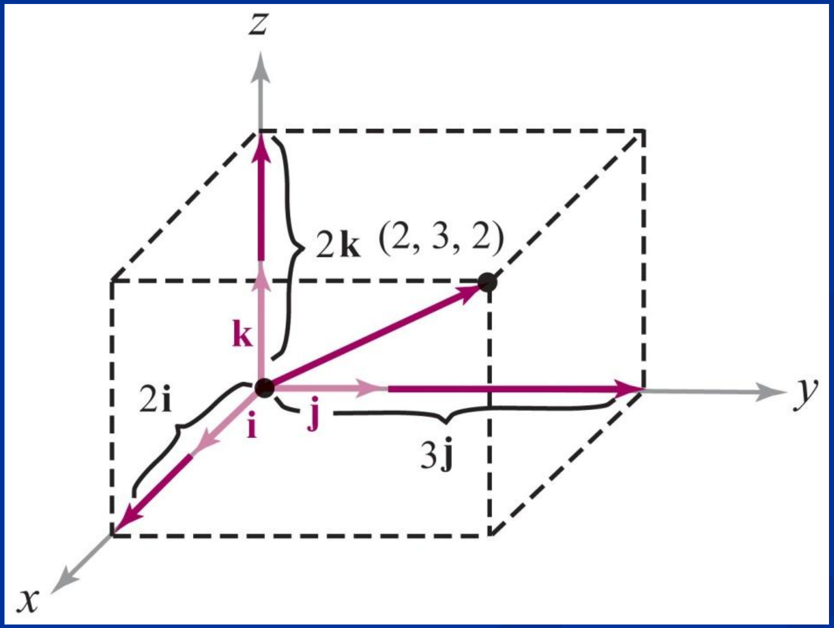
Properties of the Dot Product If $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, and $\mathbf{c}$ are vectors in V_3 and c is a scalar, then

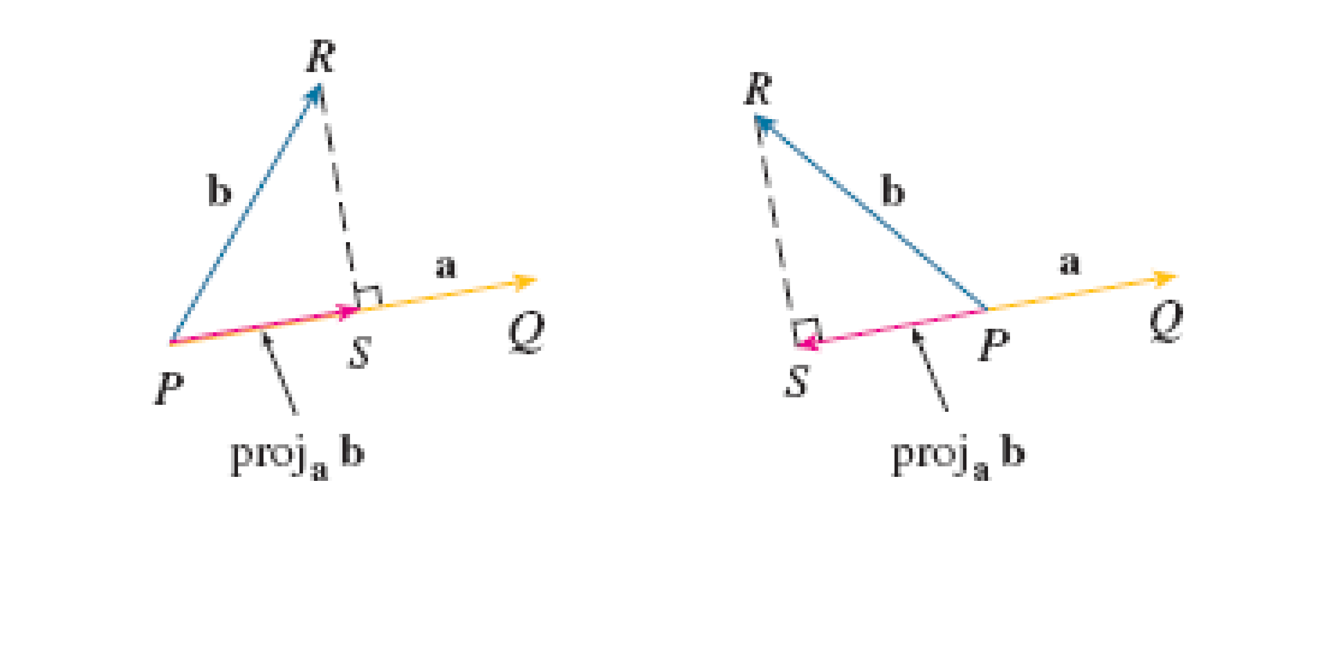
1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

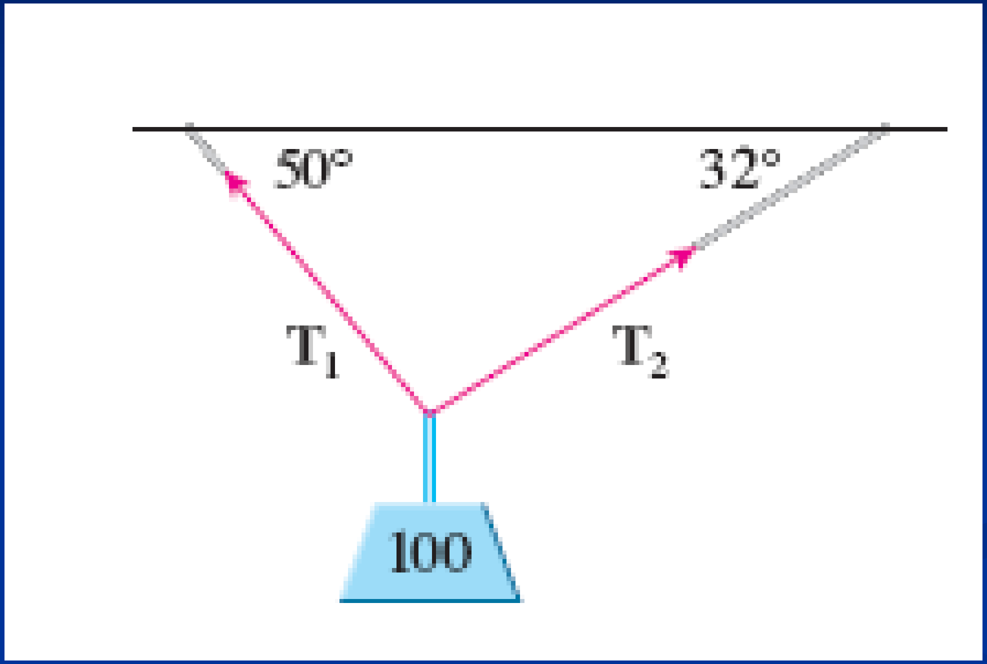
Perpendiculares u ortogonales?

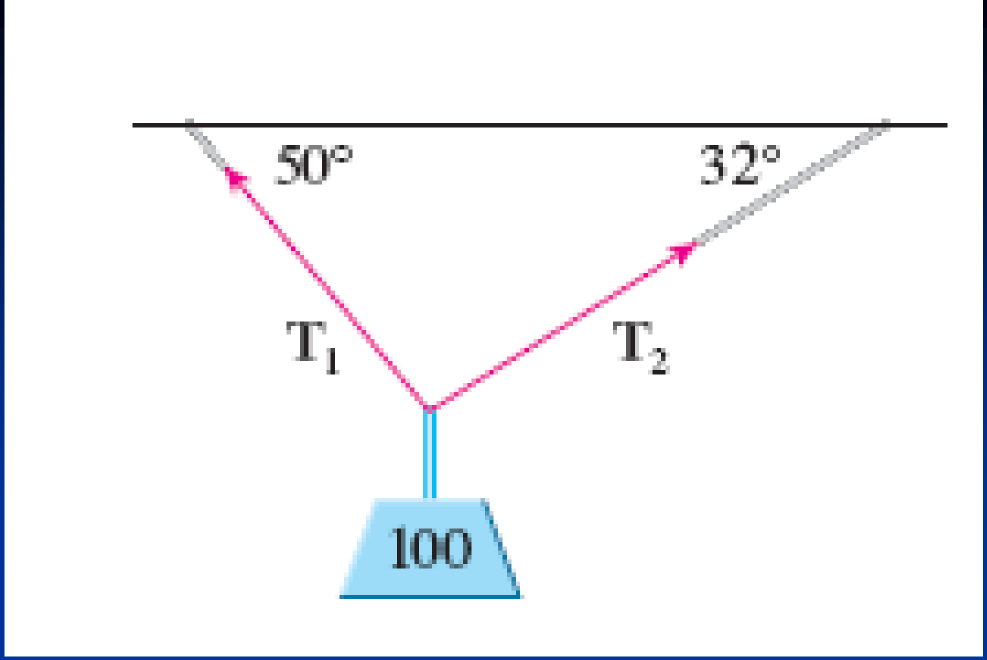
Vector unitario

- Representación del vector (2,3,2) en términos de la base canónica

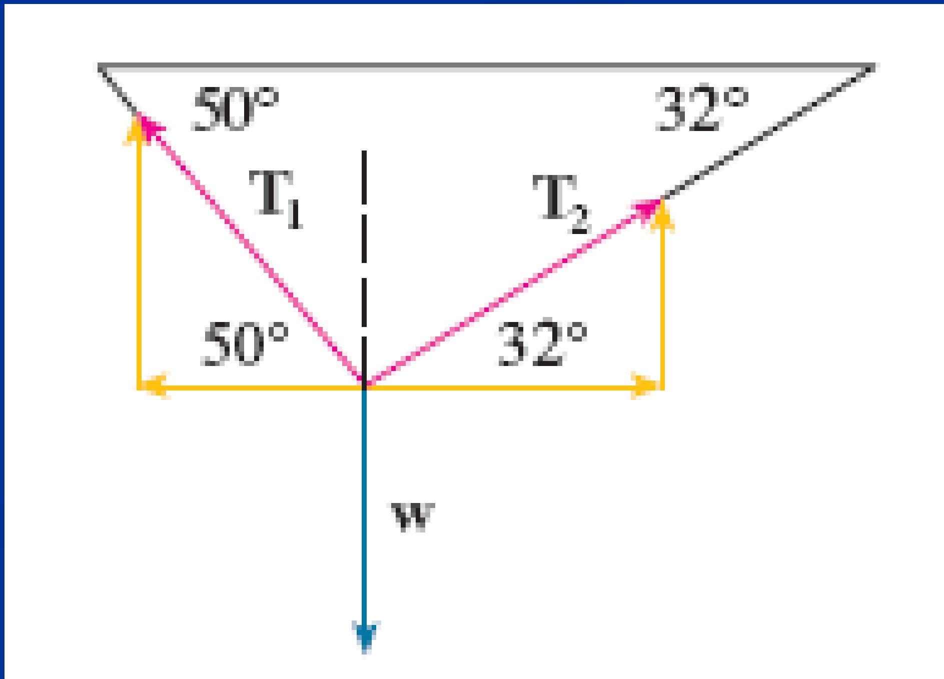



R
b
a
Q
S
P
$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$
R
b
a
Q
P
S
$\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$


50°
32°
T_1
T_2
100

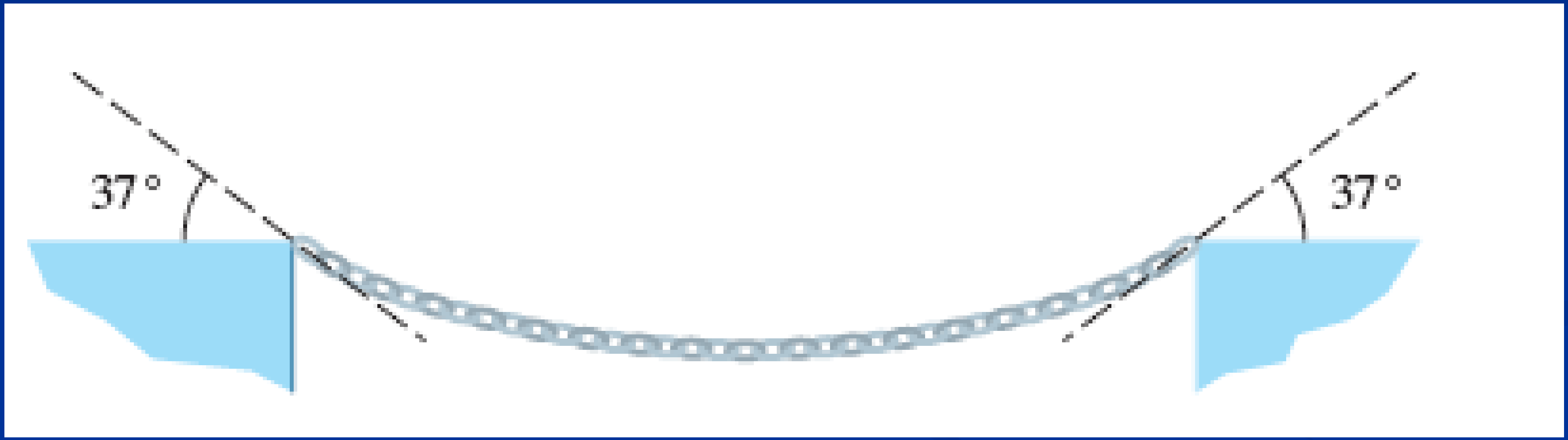


50°
32°
T_1
T_2
100



50°
32°
T_1
T_2
50°
32°
w

Tension 25 N



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

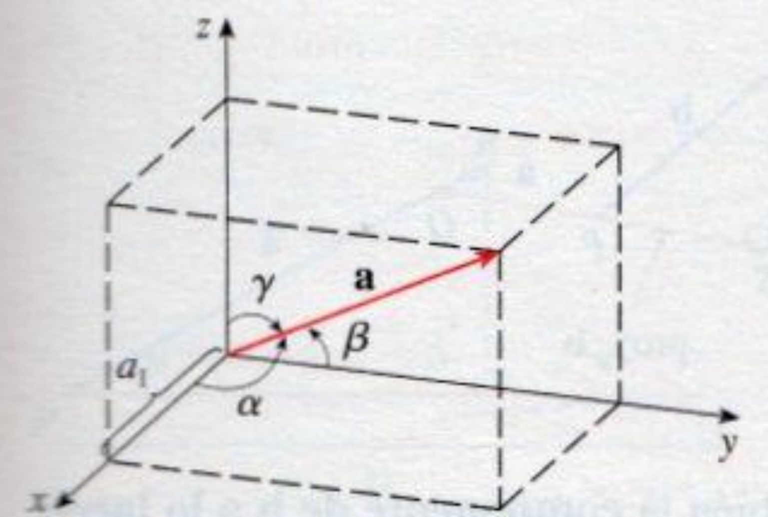


FIGURA 3

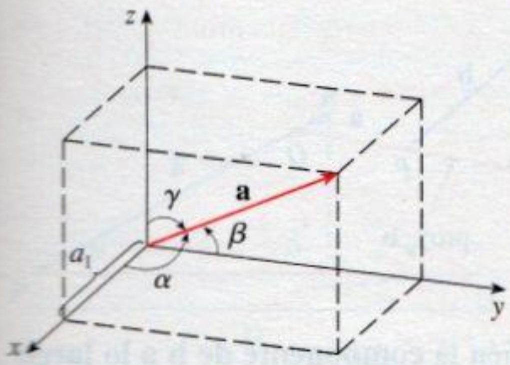


FIGURA 3

ÁNGULOS Y COSENOS DIRECTORES

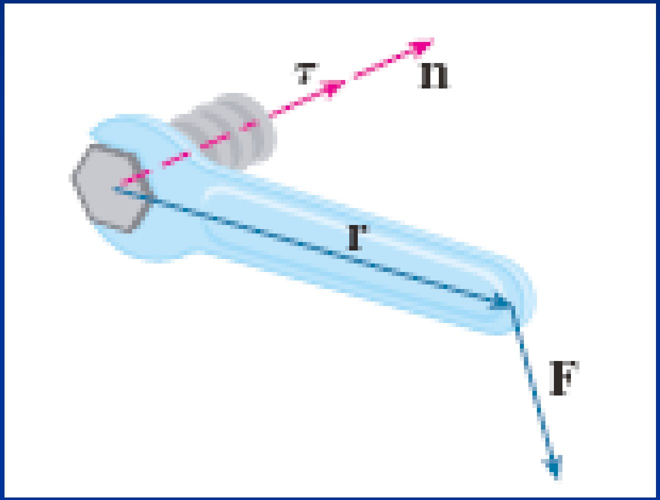
Los **ángulos directores** de un vector **a** diferente de cero son los ángulos α, β y γ (en el intervalo $[0, \pi]$) que **a** forma con los ejes positivos x, y y z (véase la figura 3).

Los cosenos de estos ángulos directores, cos α, cos β y cos γ, se llaman **cosenos directores** de un vector **a**. Si se emplea el corolario con **i** en lugar de **b**, se obtiene

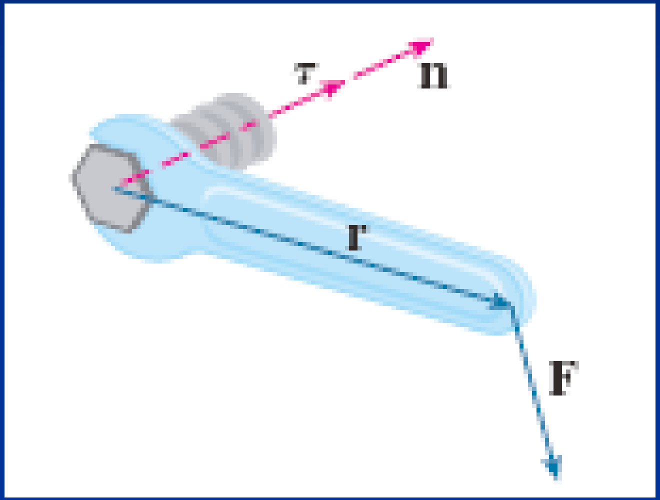
$$\boxed{8} \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}$$

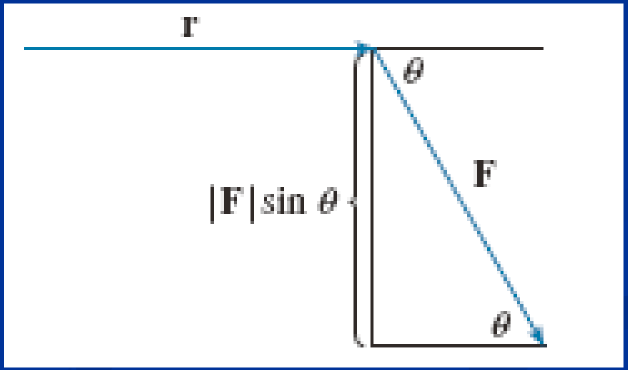
(Esto se puede ver directamente de la figura 3.)

Torca



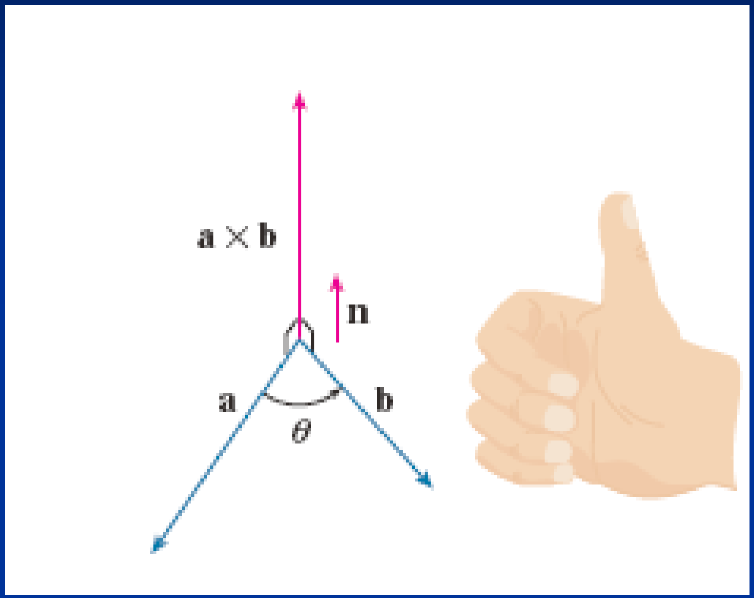
Torca





$$|\tau| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\theta$$

Producto cruz



$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta)\mathbf{n}$$

Paralelos?

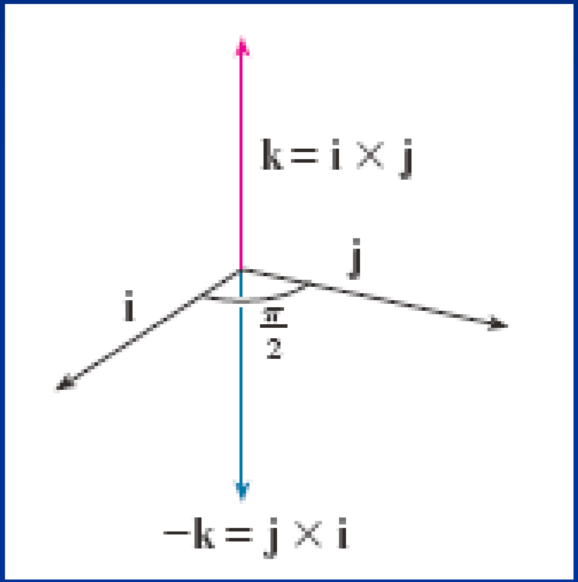
1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$

3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

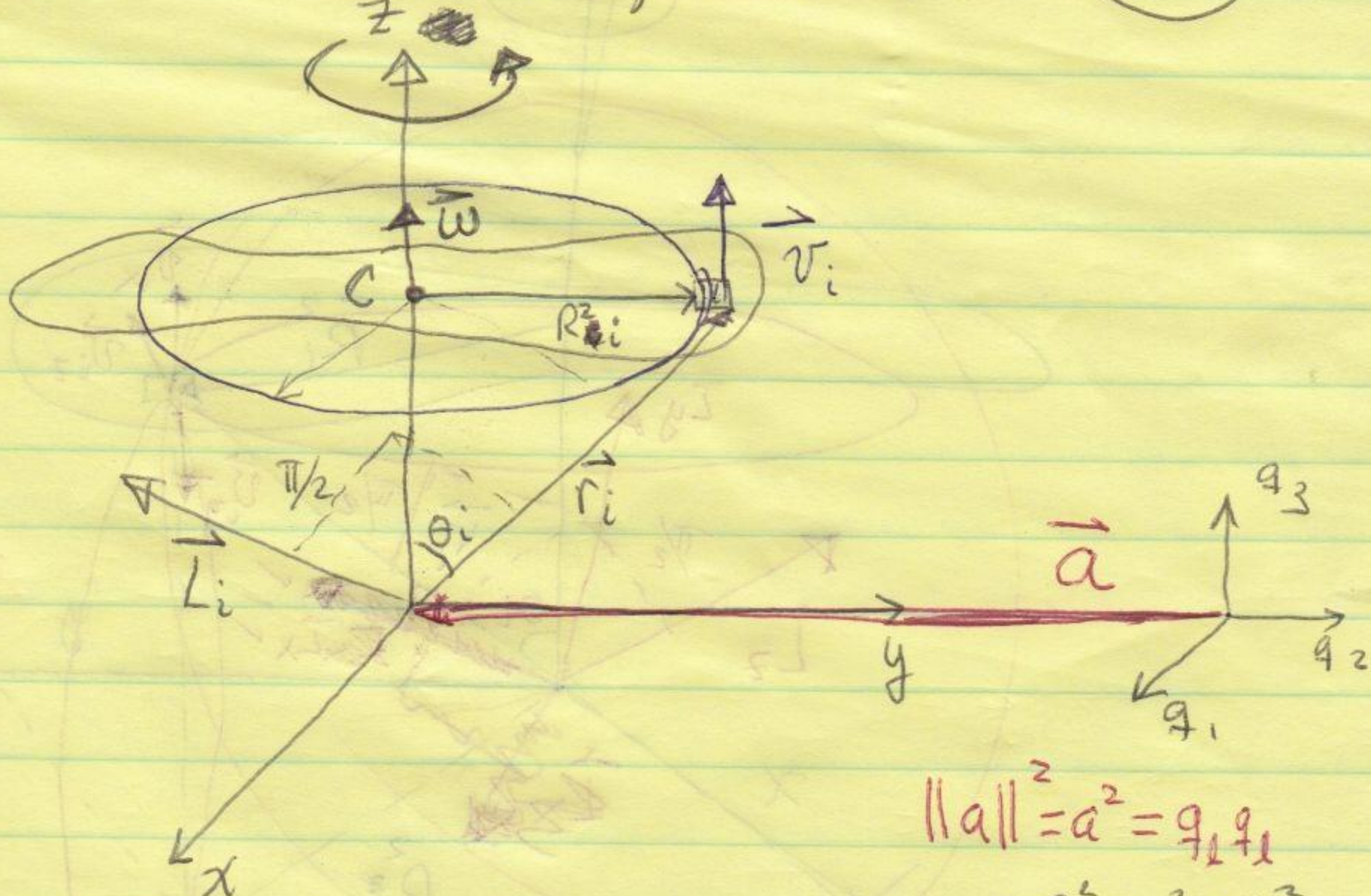
Significado Geométrico?



k = i × j
j
i
π/2
−k = j × i

Momento Angular

II



$$\|a\|^2 = a^2 = q_l q_l$$
$$= q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Example 3

Vector Space of Polynomials

The set of all constant, linear, and quadratic polynomials in x

basis $\{1, x, x^2\}$

$$Another \quad Basis: \left\{2,\ 4+x,\ 8+x^2\right\}$$

Example 4

Vector Space of Matrices

The real 2×2 matrices form a four-dimensional real vector space. A basis is

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

any 2×2 matrix $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ has a unique representation

$$\mathbf{A} = a_{11}\mathbf{B}_{11} + a_{12}\mathbf{B}_{12} + a_{21}\mathbf{B}_{21} + a_{22}\mathbf{B}_{22}.$$